RĂSPUNSURI ŞI INDICAŢII

PARTEA ÎNTÎI

I. **1.** 4/3. Se va arăta că suplimentele unghiurilor $A'OB$ şi $A'OC$ sînt egale. **2.** Unghiul bisectoarelor este jumătate din suma unghiurilor date. **3.** Unghiul bisectoarelor este jumătate din suma unghiurilor date. În cazurile cerute: 45° şi 90° $\left(\frac{\pi}{4}\text{ şi }\frac{\pi}{2}\text{ radiani}\right)$. **4.** Fie OC şi OC' bisectoarele unghiurilor AOB şi $A'OB'$. Unghiurile AOB şi BOA' sînt suplimentare. Se arată că COA' şi $A'OC'$ sînt suplimentare, deci OC şi OC' sînt în prelungire. **5.** Unul dintre unghiuri este suplimentar celor două unghiuri adiacente, deci bisectoarea lui este perpendiculară pe bisectoarele acestora, care sînt, prin urmare, în prelungire. **6.** Fie unghiul AOB ascuţit (fig. 1). Perpendicularele pe laturi pot forma unghiul ascuţit $A'OB'$ sau obtuz $A''OB'$. Pentru $A'OB'$: din două unghiuri egale (AOA'; BOB') se scade acelaşi unghi. Pentru $A''OB'$: este suplimentar cu $A'OB'$. Se va considera şi cazul unghiului obtuz (A_1OB). **7.** În ambele cazuri (OM interioară sau exterioară unghiului) se exprimă unghiurile AOM şi BOM cu ajutorul unghiului COM, apoi se adună sau se scad aceste unghiuri. **8.** a) Din două unghiuri egale se scade acelaşi unghi. b) La unghiuri egale formate de bisectoarele unghiului BOC se adaugă unghiuri egale c) Procedeu asemănător. **9.** Unghiurile AOB' şi $A'OB'$ sînt suplimentare, rezultă că unghiul AOB este suplimentul unghiului $A'OB$, laturile OB şi OB' sînt în prelungire şi cele două unghiuri sînt opuse la vîrf. **10.** a) $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle COD$ (fig. 2, *a*) nu au o parte comună: $\sphericalangle AOC = 90° - \alpha -$

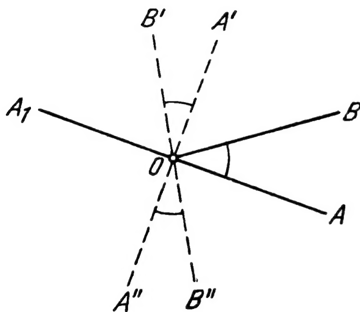
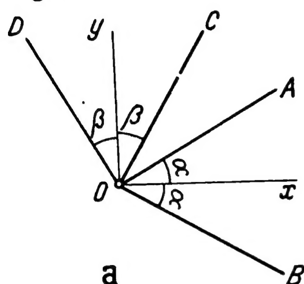


Fig. 1

$-\beta$; $\sphericalangle BOD = 90° + \alpha + \beta$, deci $\sphericalangle AOC + \sphericalangle BOD = 180°$. b) Dacă $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ (fig. 2, *b*) au o parte comună, $\sphericalangle AOC = \alpha + \beta - 90°$; $\sphericalangle BOD = 90° + \alpha + \beta > 180°$, deci $\sphericalangle BOD - \sphericalangle AOC = 180°$. În cazul în care se consideră $\sphericalangle BOD$ care nu conține pe OA și OC, atunci $\sphericalangle BOD = 270° - \alpha - \beta$ și $\sphericalangle BOD + \sphericalangle AOC = 180°$. Dacă OA și OC se confundă, OB și OD sînt în prelungire.



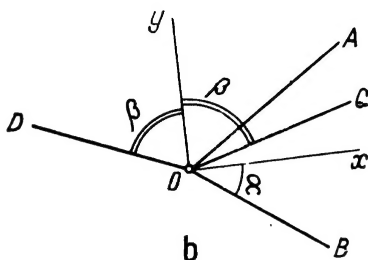


Fig. 2

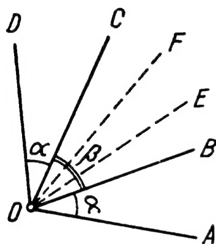


Fig. 3

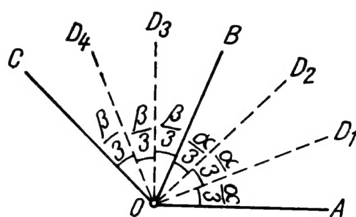


Fig. 4

11. Din fig. 3 avem $\sphericalangle AOE = \frac{\alpha + \beta}{2} = \sphericalangle DOF$; $\sphericalangle EOF = \sphericalangle AOD - \sphericalangle AOE - \sphericalangle DOF = 2\alpha + \beta - \alpha - \beta = \alpha$.
12. Din fig. 4 avem $\sphericalangle D_1OD_4 = \frac{2(\alpha + \beta)}{3}$; $\sphericalangle D_1OD_3 = \frac{2\alpha + \beta}{3}$; $\sphericalangle D_2OD_4 = \frac{\alpha + 2\beta}{3}$; $\sphericalangle D_2OD_3 = \frac{\alpha + \beta}{3}$. Caz particular: $\sphericalangle D_1OD_4 = 120°$; $\sphericalangle D_1OD_3 = 60° + \frac{\alpha}{3}$.

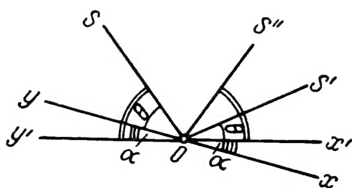


Fig. 5

13. Unghiul format de cele două drepte simetrice este dublul unghiului xOy **14.** Avem (fig. 5) $\sphericalangle SOy = \sphericalangle S'Ox = \theta$, iar după

rotire $\sphericalangle SOy' = \sphericalangle S''Ox'$ în care exprimînd unghiurile cu ajutorul lui θ și al unghiului α, se obine $\sphericalangle S'OS'' = 2\alpha$. **15.** $360°...400^g$; $\frac{n°}{360°} = \frac{c^g}{400^g}$, de unde rezultă formulele respective. **16.** $\frac{\pi}{12}$; 0,6; 0,6594. **17.** 34°22′38″; 300°; 7°30′. **18.** $\frac{10}{9}n° - n° = 8; n° = 72°$.

19. 135° și 45° $\left(\frac{3\pi}{4}$ și $\frac{\pi}{4}$ în radiani$\right)$. **20.** Notăm cu α unghiul. Su-

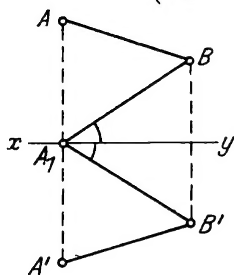


Fig. 6

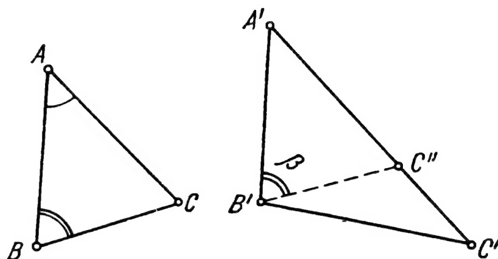


Fig. 7

plimentul său va fi $\pi-\alpha$, iar complementul $\frac{\pi}{2}-\alpha$; $\pi-\alpha= =n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; $\alpha=\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{\pi}{2}$; $n=4, \alpha=\frac{\pi}{3}=60°$; $n=5$, $\alpha=\frac{3\pi}{8}=67°30'$.

II. **21.** Dacă B', C' sînt picioarele medianelor pe $\overline{AC} = \overline{AB}$ se arată că triunghiurile ABB', ACC' sînt egale. La fel pentru înălțimi și bisectoare. **22.** Se demonstrează pe rînd cu triunghiurile OAB', OBA', apoi IAA', IBB' și în sfîrșit OAI, OBI sînt egale. **23.** Triunghiurile OAB, $OA'B'$ sînt egale. **24.** Rezultă din cea precedentă. **25.** Dacă A_1 este mijlocul lui AA' (fig. 6) așezat pe xy, triunghiurile ABA_1, $A'B'A_1$ sînt egale. **26.** Dacă A, B, C sînt punctele date, $A'B'C'$ simetricele lor, avem $\sphericalangle ABB' = \sphericalangle A'B'B$ și $\sphericalangle CBB' = \sphericalangle C'B'B$. **27.** Punctul comun a două perpendiculare este egal depărtat de toate vîrfurile, deci este și pe a treia perpendiculară. **28.** Punctul comun a două bisectoare este egal depărtat de toate laturile, deci se găsește și pe o a treia bisectoare. **29.** Aceeași metodă ca în problema precedentă. **30.** Triunghiurile $A'BB'$, $B'CC'$, $C'AA'$ sînt egale.

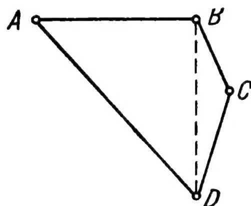


Fig. 8

31. Triunghiurile $A_1'A_2A_2'$, $A_2'A_3A_3'$, ..., $A_nA_1A_1'$ sînt egale. **32.** În fig. 7 luăm pe latura $\overline{A'C'}$, $\overline{A'C''} = \overline{AC}$. Triunghiurile $A'B'C''$,

ABC sînt egale. **33.** Pentru $\sphericalangle B > \sphericalangle D$ ducem $\overline{BD}$ (fig. 8). Avem relațiile $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ADB$; $\sphericalangle DBC > \sphericalangle BDC$; adunînd, rezultă $\sphericalangle B > > \sphericalangle D$. Pentru $\sphericalangle C > \sphericalangle A$, ducem $\overline{AC}$. **34.** Avem $\overline{BC} < \overline{OB} + \overline{OC} < < \overline{AB} + \overline{AC}$ și alte două analoge. **35.** Avem $\overline{AM} - \overline{MB} < \overline{AM} < \overline{AB} + + \overline{MB}$ și $\overline{AC} - \overline{MC} < \overline{AM} < \overline{AC} + \overline{MC}$ și prin adunare deducem $\frac{\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}}{2} < \overline{AM} < \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{2}$. Dacă scriem și relațiile analoge pentru $\overline{BC}$ și $\overline{CP}$, deducem inegalitățile cerute. **36.** O înălțime este mai mică decît fiecare latură care pleacă din același vîrf. **37.** Prelungind mediana $\overline{AM}$ în triunghiul ABC cu $\overline{AD} = \overline{AM}$, avem triunghiurile ACM și BMD egale și $\overline{AD} < \overline{AB} + \overline{AD}$. **38.** Rezultă din problemele anterioare. **39.** Ducem AM așa ca $\sphericalangle BAM = \sphericalangle B$, deci $\sphericalangle CAM = \sphericalangle C$. **40.** Luăm punctele comune dreptei (D) cu bisectoarele unghiului. **41.** Ducem din P perpendiculare pe bisectoarele unghiului. **42.** Două soluții: paralela la AB; dreapta care unește pe C cu mijlocul lui $\overline{AB}$. **43.** Dacă A și B sînt de părți diferite față de xy, M este punctul unde AB intersectează pe xy, Dacă sînt de aceeași parte, luăm simetricul B' al lui B față de xy și am revenit la cazul precedent. **44.** Dacă A și B sînt de aceeași parte față de xy, M este punctul comun dintre AB și xy (un caz de imposibilitate). Dacă A și B sînt de părți diferite, luăm simetricul unuia din ele față de xy. **45.** În fig. 9 se iau simetricele lui A față de Ox și al lui B față de Oy. Dreapta $A'B'$ intersectează pe Ox și Oy în M și N. Orice altă poziție dă pentru

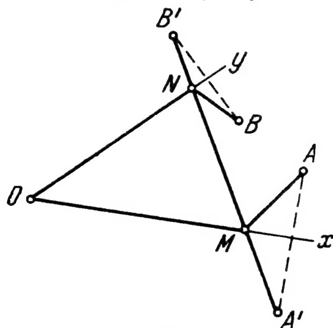


Fig. 9

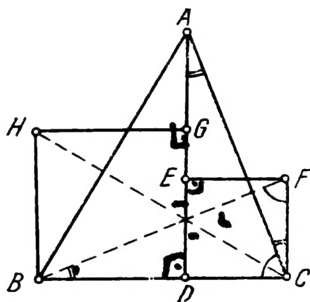


Fig. 10

$A'MNB'$ o linie frîntă. Trebuie ca $A'B'$ să taie laturile unghiului și nu prelungirile lor. (R.M.F. 1953). **46.** Ducem o dreaptă arbitrară care intersectează laturile unghiului în B și C. Bisectoarele unghiurilor formate se intersectează în două puncte pe bisectoarea unghiului. După felul cum am dus dreapta, avem

o bisectoare sau pe cealaltă. *Altfel.* Se duc drepte paralele cu laturile unghiului egal depărtate de ele, astfel ca să formeze un unghi cu vîrful accesibil și interior unghiului dat. Bisectoarea acestui unghi este și bisectoarea unghiului dat. **47.** În fig. 10 triunghiurile ACD și BFC sînt egale, deci $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BFC$;

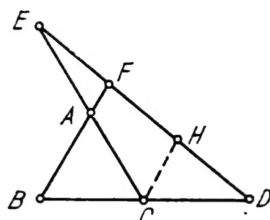


Fig. 11

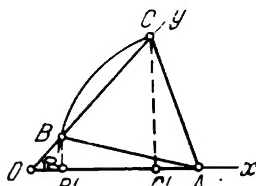


Fig. 12

$\sphericalangle DAC = \sphericalangle FCA$, de unde rezultă $\overline{BF} \perp \overline{AC}$. La fel se arată că $\overline{CH} \perp \overline{AB}$.

III. **48.** Unghiurile de la baza triunghiului format sînt egale cu ale triunghiului dat. **49.** Consecință a problemei precedente. **50.** Triunghiurile MAC, MBD sînt egale. **51.** Paralelele duse prin vîrfurile triunghiului la laturile opuse formează un triunghi care are mijloacele laturilor în vîrfurile triunghiului dat. Problema se reduce la problema 27. **52.** Revine la concurența înălțimilor unui triunghi. **53.** Prelungim $\overline{B'C'}$ cu $\overline{C'D} = \overline{B'C'}$. Triunghiurile $A'B'C'$, $BC'D$ sînt egale, deci $BCB'D$ este paralelogram. **54.** Ducem prin C o paralelă la $\overline{AB}$ pînă intersectează în D paralela la $\overline{BC}$, dusă prin C'. Se formează un paralelogram și două triunghiuri egale. **55.** În fig. 11 $\overline{CH} \parallel \overline{AB}$. Avem $\overline{CH} = \frac{\overline{BF}}{2}$ și $\overline{AF} = \frac{\overline{CH}}{2} = \frac{\overline{BF}}{4}$; rezultă $\overline{AB} = \frac{3\overline{BF}}{4}$ și deci $\overline{AB} = 3\overline{AF}$. **56.** În fig. 12 avem $\sphericalangle BAB' = x$; $\sphericalangle CBA = \alpha + x$. Triunghiurile ABB' și ACC' fiind egale, $\sphericalangle ACC' = x$ și $\sphericalangle CAC' = 90 - x$. Rezultă $\sphericalangle BAC = 90 - 2x$. În triunghiul isoscel ABC avem $2(\alpha + x) + 90° - 2x = 180°$; $\alpha = 45°$. **57.** Triunghiurile egale $AB'B''$ și $BB'C$, $AC'C''$ și $BC'C$ arată că AB'' și AC'' sînt paralele la $B'C'$. Altfel, din problema 52 rezultă că AB'' și AC'' sînt paralele la $B'C'$. **58.** O este pe xy, locul este dreapta xy. Dacă O nu este pe xy, locul este o dreaptă paralelă la xy, dusă prin mijlocul distanței dintre O și xy. **59.** Dreapta care unește mijloacele laturilor adiacente este paralelă cu o diagonală a patrulaterului. **60.** Din problema precedentă rezultă că segmentele care unesc mijloacele laturilor opuse sînt diagonalele unui paralelogram. Pe de altă parte, mijloacele diago-

nalelor patrulaterului $ABCD$ (fig. 13) și mijloacele a două laturi opuse sînt și ele vîrfurile unui paralelogram. **61.** Dreptunghi, dacă diagonalele patrulaterului sînt perpendiculare. Romb, dacă diagonalele sînt egale. Pătrat, dacă diagonalele sînt egale și perpendiculare . **62.** În fig. 14, M și N sînt la mijlocul diagonalelor

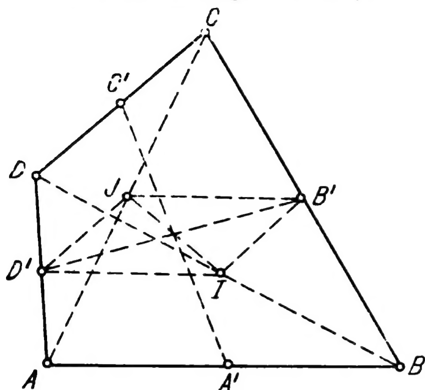


Fig. 13

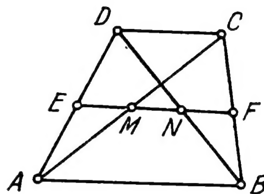
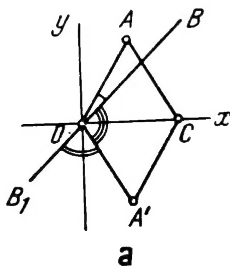


Fig. 14

(cf. 54) $\overline{EM} = \overline{NF} = \frac{\overline{DC}}{2}$, $\overline{MF} = \frac{\overline{AB}}{2}$; adunînd și scăzînd, obținem $\overline{EF}$ și $\overline{MN}$. **63.** M este mijlocul ipotenuzei $\overline{BC}$, N mijlocul laturii $\overline{AC}$, $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, deci $\overline{MN}$ este perpendiculară pe mijlocul lui $\overline{AC}$, $\overline{MA} = \overline{MC} = \overline{MB}$. **64.** Dacă M este mijlocul lui $\overline{BC}$, triunghiul ABM este echilateral. **65.** Construcția este dată în fig. 15. a) Se constru-



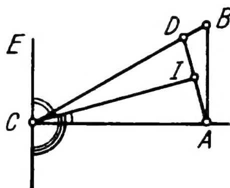


Fig. 15

iește OB bisectoarea unghiului drept xOy și triunghiurile echilaterale OCA, $OA'C$ (fig. 15, *a*); $\sphericalangle AOB = 15°$, $\sphericalangle B_1OA' = 75°$ și $\sphericalangle A'OB = 105°$. b) Se construiește triunghiul dreptunghic ABC, avînd $\overline{AB} = \frac{\overline{CB}}{2}$ (fig. 15, *b*). Se ia $\overline{CD} = \overline{CA}$ și se duce $\overline{CI} \perp \overline{AD}$.

66. În triunghiurile dreptunghice BB_1C, BC_1C, A'' este mijlocul ipotenuzei comune. **67.** Fie G punctul comun medianelor $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ și B'', C'' mijloacele segmentelor $\overline{BG}$, $\overline{CG}$. Figura $B'C'B''C''$ este un paralelogram, deci G este la a treia parte a medianelor $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, plecînd de la bază. Se deduce de aici că mediana $\overline{AA'}$ trece și ea prin G. **68.** În fig. 16 avem: a) $\sphericalangle CBA + \sphericalangle B'C'A' = 90°$,

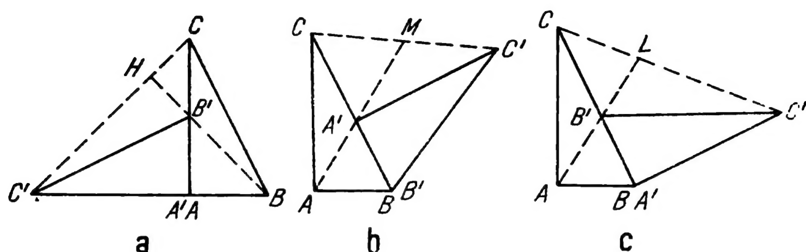


Fig. 16

deci $\overline{B'C'}$ este perpendiculară pe $\overline{BC}$. B' este ortocentrul triunghiului $CC'B$. b) Triunghiurile $A'BA$ și $CB'C'$ sînt isoscele și au unghiul de la vîrf același, deci $\sphericalangle CA'M = \sphericalangle AA'B = \sphericalangle A'CM$, deci $A'M$ este mediană în triunghiul $CA'C'$. c) $\sphericalangle CB'A = \sphericalangle A'AB' +$ $+ \sphericalangle ABC$. Mai avem $\sphericalangle C'B'A = \sphericalangle AB'B + \sphericalangle A'B'C'$; rezultă $\sphericalangle CB'A = \sphericalangle C'B'A$; LB' este bisectoare (R.M.F. 1952). **69.** a) Se unește A cu punctele unde cercul descris pe $\overline{OA}$ ca diametru intersectează dreptele Oy, Oz. Excepție cînd Oy și Oz sînt perpendiculare. b) Luăm simetricul lui A față de O și ducem prin el paralelele la Oy și Oz; punctele comune cu Oz și Oy sînt C și B. c) Se duce prin A perpendiculara pe Ox care intersectează pe Oy și Oz în B' și C'. Perpendiculara din B' pe Oz intersectează pe Ox în A'. Picioarele înălțimilor triunghiului $A'B'C'$ sînt vîrfurile triunghiului căutat. d) În triunghiul construit la punctul a) se duc prin vîrfuri paralele la laturile opuse. **70.** În fig. 17: a) Pe prelungirea lui $\overline{BA}$ dincolo de A luăm $\overline{AE'} = \overline{AE} = \overline{AB}$. Unind C cu E', segmentul $\overline{CE'}$ este paralel cu mediana din A și este egal cu îndoitul ei. Triunghiurile $AE'C$ și AEG se pot suprapune printr-o rotație de 90°. b) Dacă M este mijlocul lui $\overline{EG}$, M' al lui $\overline{E'C}$, atunci din a) rezultă că $\overline{AM}$ este perpendiculară pe $\overline{AM'}$ care este paralelă cu $\overline{BC}$. c) Triunghiurile ADC și EBI sînt egale și au două perechi de laturi perpendiculare; în triunghiul BIC înălțimile sînt concurente. **71.** Din punctul mobil se duce perpendiculara pe înălțimea coborîtă dintr-o extremitate a bazei. Se arată că distanțele punctului la laturi sînt egale cu

cele două părți ale înălțimii. Dacă punctul este pe prelungire, vom avea diferența constantă. **72.** Ducem din punctul mobil paralela la una din laturi și în virtutea problemei precedente reducem suma la suma distanțelor unui punct mobil pe o latură a triunghiului dat. **73.** În fig. 18, AB_1BB_2 este dreptunghi, în care o diagonală este $\overline{AB}$, iar cealaltă diagonală trece prin mijlocul

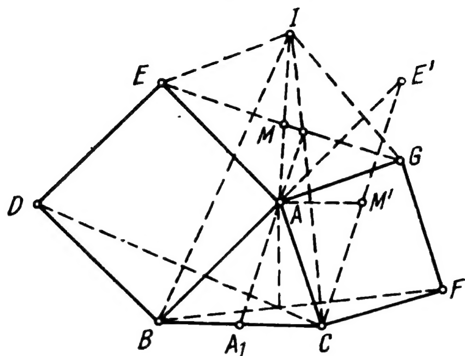


Fig. 17

lui $\overline{AB}$ și este paralelă la $\overline{BC}$. Din dreptunghiul AC_1CC_2 reiese aceeași proprietate. **74.** În fig. 19, prin B ducem $(D_1) \parallel (D)$ și luăm de o parte și cealaltă a lui B segmente egale cu l. Dacă $AB \parallel$ $\parallel (D)$, avem imposibilitate, afară de cazul $\overline{A'B} = l$ cînd avem

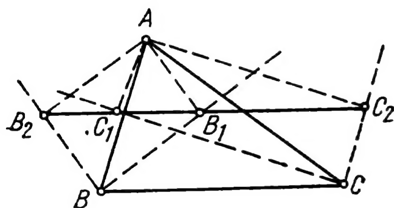


Fig. 18

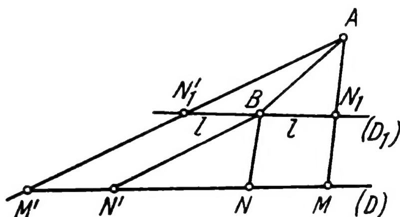


Fig. 19

oricite soluții. **75.** Fie $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ (fig. 20). În triunghiurile ABF și CBE, avem $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ și $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2$, deci $\sphericalangle CEB =$ $= \sphericalangle AFB, \sphericalangle D_1 = \sphericalangle F$. Reciproca se demonstrează ușor. **76.** $MACP$ este trapez și $\overline{BB'}$ trece prin mijlocul lui $\overline{MP}$, $MBDP$ este trapez și $\overline{CC'}$ trece prin mijlocul lui $\overline{MP}$. Deci N este mijlocul lui $\overline{MP}$. (G.M.). **77.** În fig. 21, BD, BE; CD, CE sînt trisectoarele unghiurilor xBC; yCB. $\sphericalangle\ xBC = 180° - \sphericalangle B$, $\sphericalangle yCB = 180° -$

$- \sphericalangle C = 90° + \sphericalangle B, \alpha = 60° - \sphericalangle \frac{B}{3}; \beta = 30° + \sphericalangle \frac{B}{3}; \alpha + \beta = 90°.$ $2\alpha + 2\beta = 180°$, deci $BD \parallel CE$, $BE \perp CD$ și $\overline{OB} = \overline{OE}$; $\overline{OC} = \overline{OD}$, deci $BCED$ este romb. **78.** Triunghiurile BMN, BAC sînt egale, de asemenea și CNP, BCD. **79.** Ducem din B perpendiculara pe bisectoarea care intersectează AC în B''. Se arată că D este la

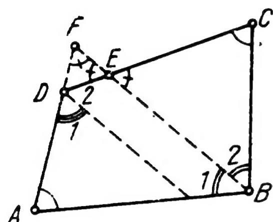


Fig. 20

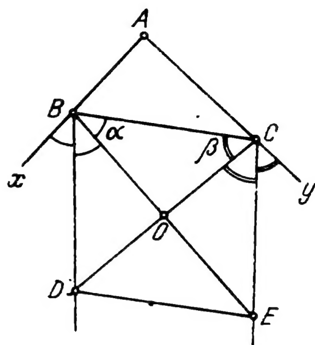


Fig. 21

mijlocul lui $\overline{B''C}$. **80.** Dacă $ABCD$ este paralelogramul dat, bisectoarele din A și B, care se intersectează în A', sînt perpendiculare, la fel cele din C și D, care se intersectează în C', și așa mai departe. Dacă unim A' cu mijlocul lui $\overline{AB}$, C' cu mijlocul lui $\overline{CD}$,

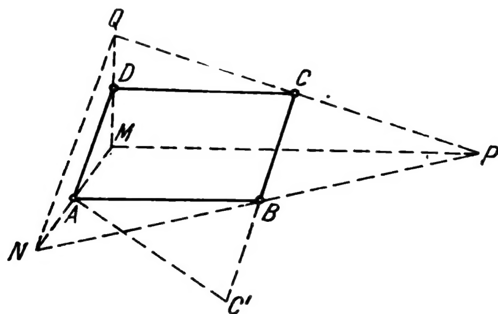


Fig. 22

obținem dreptele $AD \parallel BC$, deci sînt în prelungire. **81.** a) Din fig. 22 rezultă $\overline{NQ} = 2\overline{BC}$ și $\overline{NQ} \parallel \overline{BC}$; $\overline{NQ} = 2\overline{AD}$ și cum A este mijlocul lui $\overline{MN}$, D este mijlocul lui $\overline{MQ}$; b) $\overline{MP}$ și $\overline{NQ}$ nu pot

fi paralele între ele. Pentru ca $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$, M se va afla pe dreapta $\overline{AC'}$, C' simetricul lui C față de B. **82.** a) AA_1CC_1, AC_2CA_2 sînt dreptunghiuri (fig. 23), A_1C_1 și A_2C_2 trec prin mijlocul lui $\overline{AC}$. b) $\sphericalangle A = 60°$. (288 R.M.T. 923). **83.** Observăm că (fig. 24) $\overline{IB_1} = \overline{IC_1}$, $\overline{IC_2} = \overline{IA_2}$, $\overline{IA_3} = \overline{IB_3}$, deci $B_3C_2 \parallel BC$. Punctul P_1 este

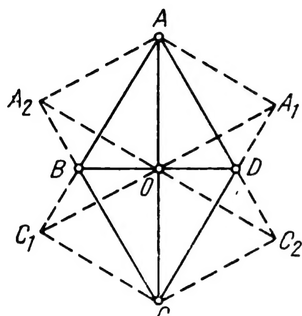


Fig. 23

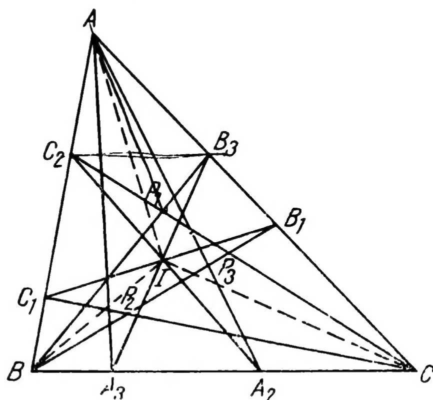


Fig. 24

situat pe mediana din A. Dreptele AP_1 , BP_2, CP_3 se intersectează în centrul de greutate G al triunghiului. **84.** Observăm că G este centrul de greutate al triunghiurilor AO_1A_1, BO_1B_1, CO_1C_1 (fig. 25). **85.** a) Pe una din laturile unghiului drept BAD se

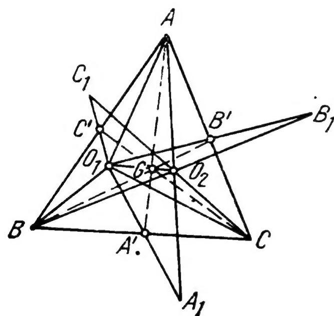


Fig. 25

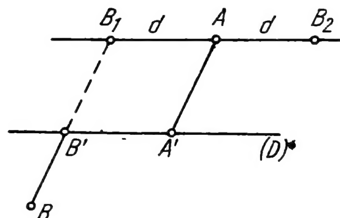


Fig. 26

ia $\overline{AB} = a$ și din B ca centru se descrie un cerc cu raza a. Se alege pe cerc un punct C și se descrie din C un al doilea cerc cu aceeași rază care intersectează a doua latură a unghiului drept

în D și D'. Patrulaterul se reduce la triunghiul echilateral ABC sau la triunghiul dreptunghic ABD', dacă D se confundă cu A, cînd $\alpha = 60°$. Deci trebuie ca $\alpha > 60°$. Poziția limită a lui C se obține cînd al doilea cerc este tangent la AD; $ABCD$ este pătrat, deci $\alpha \leqslant 90°$. b) Trebuie construit cu rigla și compasul unghiul

Fig. 27

Fig. 28

de 75° (R.M.F. 1952). **86.** În fig. 26, $AB_1 \parallel (D)$, $\overline{AB_1} = \overline{AB_2} = d$. Drumul $AA'B'B$ răspunde la problemă. Plecînd de la B_2, obținem o altă soluție. Alegem dintre ele pe aceea care ne dă drumul cel mai scurt. Dacă (D) trece prin mijlocul lui $\overline{AB}$, cele două soluții nu se deosebesc ca lungime a drumului, ci ca sens. Dacă punctele A și B ar fi de aceeași parte a dreptei (D), luăm simetricul lui A față de (D) și revenim la cazul precedent. **87.** Problema 62 arată că trapezul, în acest caz, este un paralelogram. **88.** Unghiul ABD este exterior triunghiului BDC'. **89.** $\sphericalangle A'AA_1 = \frac{\sphericalangle A}{2} - \sphericalangle BAA_1$, iar $\sphericalangle BAA_1 = 1 \sphericalangle$ drept $- \sphericalangle B$ și $\sphericalangle A = 2 \sphericalangle$ drepte $-(\sphericalangle B + \sphericalangle C)$. **90.** B' este mijlocul lui $\overline{AC}$ (fig. 27). Observăm că $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ și $\overline{A_1B'} \parallel \overline{AA'}$. În triunghiul isoscel $AA'C$, avem $\sphericalangle A'AA_1 = \sphericalangle AA'B'$. **91.** Ducem $\overline{DO} \parallel \overline{AB}$ și $\overline{BO} \parallel \overline{AD}$ (fig. 28). Din triunghiurile egale EHK, DOC, pe de o parte, FLM, BOC, pe de altă parte, se deduce că $\overline{CO}$ este egală și paralelă cu $\overline{HK}$ și $\overline{LM}$. **92.** Se ia poziția particulară A_0; (fig. 29) $\sphericalangle OA_0P = 45°$, $\overline{A_0N} = \overline{PA} = \overline{NM}$; deci $\sphericalangle MA_0N = 45° =$ const. M va descrie dreapta A_0M. La fel simetrica ei față de OP. (R.M.F. III 1952). **93.** Locul lui N este o dreaptă paralelă cu cea dată (probl. 58). M fiind fix, mijlocul lui $\overline{MN}$ descrie și el o paralelă la dreapta dată. **94.** $\overline{AA'}$ este diagonala unui paralelogram, iar $\overline{MP}$ și $\overline{NQ}$ care trec prin mijlocul ei sînt

împărțite în părți egale. **95.** D, E, F sînt mijloacele laturilor triunghiului ortic (fig. 30), $A'B'C'$ triunghiul obținut ca în enunț, G, L mijloacele lui $\overline{BA_1}$, $\overline{A_1C}$; H, M mijloacele lui $\overline{BC_1}$ și $\overline{CB_1}$. Avem $\overline{DF} = \overline{HG} = \frac{1}{2}\overline{A_1C_1}$; $\sphericalangle FDB' = \sphericalangle HGB$; $\sphericalangle DFB' = \sphericalangle BHG$. Rezultă egalitatea triunghiurilor DFB' și BHG, deci

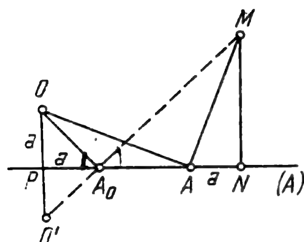


Fig. 29.

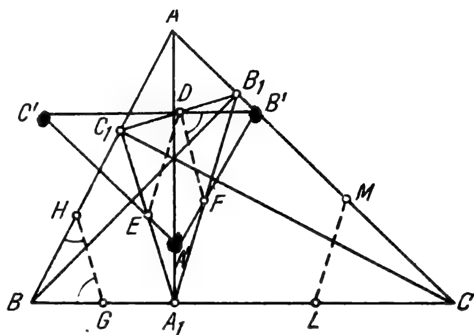


Fig. 30

$\overline{DB'} = \overline{BG} = \frac{1}{2}\overline{BA_1}$; analog, $\overline{DC'} = \overline{LC} = \frac{1}{2}\overline{A_1C}$, deci $\overline{B'C'} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. La fel pentru $\overline{C'A'}$ și $\overline{A'B'}$ (R.M.T.V.)

IV. **96.** Triunghiurile ACB, ACD sînt egale, deci triunghiul AMC este isoscel. **97.** $\sphericalangle AOE$ este exterior triunghiului AOC, iar triunghiurile AOB și BOC sînt isoscele. **98.** Ducem coarda $AMB \perp \overline{MO}$ și coarda CMD. Distanța $\overline{ON}$ la CMD este mai mică decît $\overline{OM}$, deci $\overline{AB} < \overline{CD}$. **99.** Fie O' proiecția lui O pe $\overline{CD}$. Avem $\overline{CO'} = \overline{O'D} = \overline{EO} = \overline{OF}$. **100.** Ducînd raze la punctele de contact, se formează triunghiuri dreptunghice egale. *Altfel.* O rotație în jurul centrului aduce unul din puncte, cu tangentele duse din el, peste celălalt și tangentele corespunzătoare. **101.** Centrul este egal depărtat de laturile unghiului. **102.** În trapezul $ABCD$ centrul O al cercului ABC se află pe mediatoarea bazei $\overline{AB}$. D fiind simetricul lui C față de această mediatoare, care este și diametru, se află pe cerc. **103.** Dacă $ABCD$ este patrulaterul circumscris (fig. 31), segmentele a care pleacă din A, mărginite la punctele de contact, sînt egale; de asemenea segmentele b care pleacă din B; c și d cele din C și D. Avem $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC} = a + b + c + d$. **104.** Se bazează pe reciproca teoremei precedente. Fie E, F mijloacele lui $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. Avem $\overline{EF} + \overline{BC} = \overline{EB} + \overline{FC} = 3\ \overline{BC}/2$, deci

BCF este circumscris unui cerc. **105.** Diametrul perpendicular pe acea direcție. **106.** Un cerc concentric cu cel dat. **107.** Mediatoarea segmentului determinat de acele puncte. **108.** Dreapta care trece prin punctul dat și prin centrul cercului. Cititorul va despărți, pe această dreaptă, porțiunea care corespunde cercurilor tangente

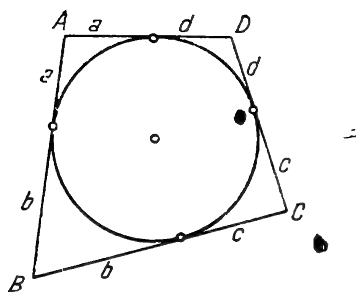


Fig. 31

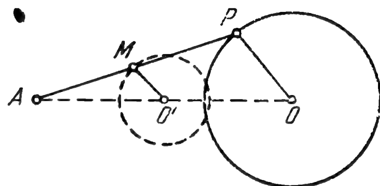


Fig. 32

exterior, de aceea care corespunde cercurilor tangente interior sau cuprind în interior cercul dat. Centrul cercului dat nu face, propriu-zis, parte din loc. **109.** Un cerc cu centrul în mijlocul lui $\overline{AO}$ și cu raza pe jumătate cît a cercului dat (fig. 32). **110.** Proiecția centrului pe $\overline{AB}$ este mijlocul acestei laturi și a coardei $\overline{CD}$. **111.** Perpendicularele coborîte din O_1 și O_2 pe $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ trec prin mijlocul ipotenuzei, al cărui loc es cercul descris pe $\overline{O_1O_2}$ ca diametru. **112.** Figura A_1BHC este paralelogram (fig. 33). Mijlocul A_2 al laturii $\overline{BC}$ este mijlocul segmentului $\overline{A_1H}$. În triunghiul AA_1H avem medianele $\overline{AA_2}$, $\overline{A_1A'}$ și $\overline{HO}$ concurente, de unde rezultă soluția. **113.** Observăm că $\overline{B'B_1} = \overline{AB_1} - \overline{AB'} = \overline{AC_1} - \overline{AC'} = \overline{C'C_1}$ (fig. 34). Pe de altă parte avem $\overline{B'B_1} = \overline{B'C} + \overline{CB_1} = \overline{CA'} + \overline{CA_1}$; $\overline{C'C_1} = \overline{C'B} + \overline{BC_1} = \overline{BA'} + \overline{BA_1}$, de unde $\overline{CA'} - \overline{BA_1} = \overline{BA'} - \overline{CA_1}$. Dar suma acestor cantități egale este nulă, deci fiecare este nulă, de unde $\overline{CA'} = \overline{BA_1}$, $\overline{BA'} = \overline{CA_1}$. Rezultă $\overline{B'B_1} = \overline{C'C_1} = \overline{BC}$. **114.** Notînd cu a, b, c laturile triunghiului și cu $2p$ perimetrul, avem $\overline{AC'} = p - a, \ldots$; $\overline{A_1A'} = |\, b - c\,|$;... **115.** a) $\sphericalangle ABE = 45°$, triunghiurile isoscele ABD și ABE sînt egale. b) Înălțimile din E și D ale triunghiurilor isoscele sînt egale, deci $DE \parallel AB$. c) Fie O centrul cercului înscris în ABB'; el se află pe AC, mediatoarea lui $\overline{BD}$, deci $\overline{IB} = \overline{ID} = \overline{IE}$.

Rezultă $\sphericalangle\ BEI = \sphericalangle\ IBE = 22°30'$, deci $EI \parallel BD$, adică $\sphericalangle\ CIE = 90°$. Triunghiurile CBE și CIE sînt dreptunghice, înscrise în cercul cu diametrul $\overline{CE}$ (concursul de mat., 1950 R.M.F.). **116.** Proiectăm pe O în P și Q pe $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$. Din $\overline{MP} = \overline{M'P}$; $\overline{NQ} = \overline{N'Q}$, deducem $\overline{M'A} - \overline{MA} = 2\overline{AP}$; $\overline{N'A} - \overline{NA} = 2\overline{AQ}$; $\overline{MB} - \overline{M'B} = 2\overline{BP}$; $\overline{NC} - \overline{N'C} = 2\overline{CQ}$ și observăm că $\overline{AQ} = \overline{BP}$ și $\overline{AP} = \overline{CQ}$. **117.** Ca egal depărtate de centru. **118.** Fie P punctul al cărui loc se caută (fig. 35). Triunghiurile OMN și PMN sînt egale, deci $\overline{MP} = \overline{ON} =$ const. Locul este tangenta în D la cerc. **119.** Se proiectează centrele pe dreapta dusă. **120.** Proiectăm centrele pe cele două drepte. Distanțele dintre proiecții, pe una și pe cealaltă, sînt egale și egale fiecare cu jumătatea segmentului corespunzător. **121.** Aceeași demonstrație ca în problema precedentă. *Altfel.* Ducem prin al doilea punct comun A' al cercurilor, paralela DD' la BB'. Din simetria figurii față de linia centrelor avem $\overline{DD'} = \overline{CC'}$, iar din problema precedentă $\overline{DD'} = \overline{BB'}$. **122.** Fie MN și PQ cele două secante [M, P pe cercul (O_1), N, Q, pe (O_2)] (fig. 36). Mijloacele coardelor $\overline{MP}$ și $\overline{NQ}$ descriu cercuri concentrice cu (O_1) și (O_2) [$\overline{MP} = \overline{NQ} = \overline{AB}$ coarda comună lui (O_1) și (O_2)]. E, F fiind mijloacele lui $\overline{MN}$ și $\overline{PQ}$, avem $EF \parallel MP$, deci $ABFE$ este trapez isoscel; mijlocul lui $\overline{BF}$ este și proiecția mijlocului lui $\overline{O_1O_2}$, deci centrul cercului circumscris lui $ABFE$ este mijlocul ω al lui $\overline{O_1O_2}$. E și F se mișcă pe cercul (ω). Intersecția diagonalelor se află la mijlocul lui $\overline{EF}$; locul este un cerc concentric cu (ω) (R.M.T.V.). **123.** Coardele comune sînt perpendiculare pe liniile centrelor, iar acestea sînt paralele cu diagonala $\overline{AC}$. **124.** Triunghiurile BAA_1, CAA_2 (fig. 37) sînt isoscele, deci mediatoarele laturilor $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$ din triunghiul AA_1A_2 sînt bisectoare în triunghiul dat. Se iau $\overline{BA_1}$ și $\overline{CA_2}$ în sensuri opuse. **125.** Un cerc concentric cu cel dat. **126.** Un cerc concentric, cu cel dat. **127.** Depărtarea punctului O la MP rămîne constantă (fig. 38). **128.** În triunghiul isoscel ABA_1 înălțimea $\overline{AM}$ este egală cu cea din A_1, care este constantă. Sau se ia P simetricul lui A față de D'. Triunghiurile APA_1 și AMA_1 sînt egale, deci $\overline{AM} = \overline{AP} =$ const. **129.** $\overline{OM}$ este jumătate din $\overline{AB}$, deci locul este un cerc. **130.** Observăm că în triunghiul BMP (fig. 39) dreptele MA și AB sînt bisectoarele exterioare ale unghiurilor din M și B, deci PA este bisectoarea interioară din P. Ducem bisectoarea $\sphericalangle\ MBP$ pînă intersectează pe MA în A_1; PA_1 este bisectoarea

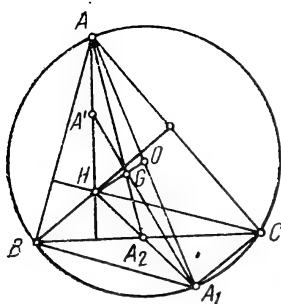


Fig. 33

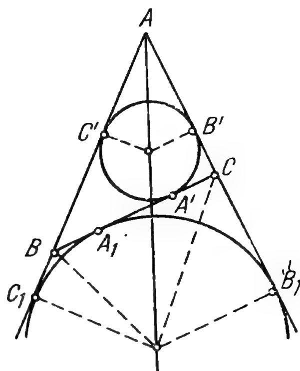


Fig. 34

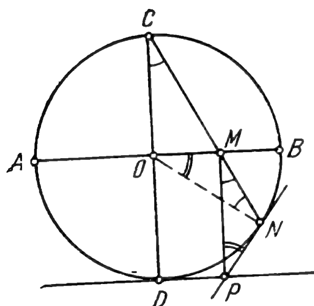


Fig. 35

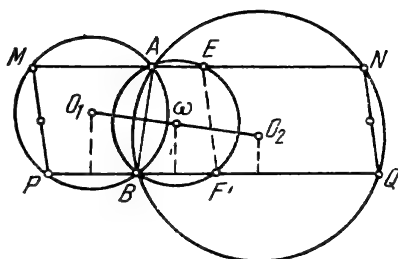


Fig. 36

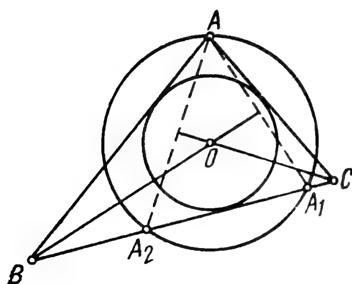


Fig. 37.

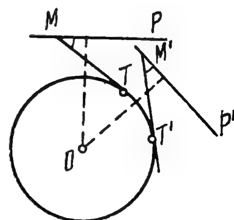


Fig. 38

exterioară în P. Locul lui P este cercul descris pe $\overline{AA_1}$ ca diametru. **131.** Punctul comun este egal depărtat de laturi. **132.** Dacă r este raza cercului dat (fig. 40), trebuie ca $l \leqslant 2r$. În cazul $l = 2r$, singura soluție este diametrul cercului, care trece prin punctul dat. Dacă $l < 2r$, atunci coardele de lungime l rămîn tangente

Fig. 39

Fig. 40

unui cerc concentric celui dat. Obținem dreapta căutată, ducînd din punctul dat tangente la cercul concentric. Două soluții, una sau nici una, după așezarea punctului dat față de acest cerc. **133.** Cercurile $BCED$ și ADE fiind egale (fig. 41), arcele DE sînt egale,

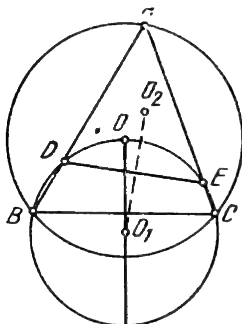


Fig. 41

Fig. 42

deci $\sphericalangle DBE = \sphericalangle DCE = \sphericalangle A$ și de aici $\sphericalangle BDC = 2\sphericalangle A$. Se deduce că cercul $BCED$ este fix și anume trece prin O. Locul punctelor D și E este găsit. Coarda $\overline{DE}$ în cercul $BCDE$ este de lungime constantă, deci înfășoară un cerc concentric, iar centrul cercului ADE fiind simetricul centrului cercului $BCDE$, față de DE, descrie și el un cerc concentric. Se va arăta că proprietățile se mențin și în cazurile cînd D_1E se află pe prelungirile lui AB, AC sau unul pe o latură și al doilea pe prelungirea celeilalte. **134.** MO este bisectoarea unghiului AMB, deci $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ ca coarde egal depărtate de centru. Figura $AB'BA'$ este un trapez

isoscel, deci locul lui P este AB. Mai precis, dacă M aparține arcului AB exterior cercului (O), locul este segmentul AB; dacă M se află pe arcul AB interior lui (O), locul este restul dreptei AB. **135.** OD este bisectoarea unghiului COA' (fig. 42), care fiind exterior triunghiului AOC are valoarea $2\sphericalangle CAO$. Rezultă $\sphericalangle CAO = \sphericalangle DOA'$, deci $\Delta AOB = \Delta OA'D$, avînd și $\overline{AO} = \overline{OA'}$. $OBDA'$ este dreptunghi și se deduce imediat că $ABDO$ este paralelogram. Din $BC \parallel OD$ și $\overline{BO} = \overline{DA'} = \overline{DC}$ rezultă că $OBCD$ este trapez isoscel.

V. **136.** $ABCD$ dreptunghiul înscris (fig. 43), și N, P proiec-

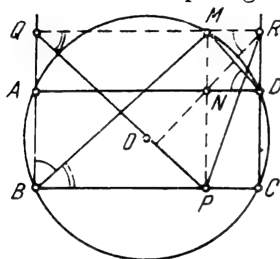


Fig. 43

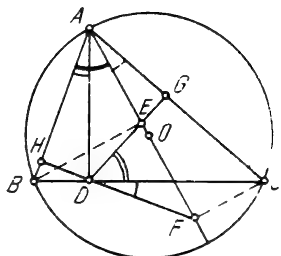


Fig. 44

țiile lui M pe $\overline{AD}$ și $\overline{BC}$, iar Q, R proiecțiile pe $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$. În dreptunghiul $MNDR$ avem $\sphericalangle MRN = \sphericalangle MDN$ și analog $\sphericalangle MQP = \sphericalangle MBP$. Însă $\sphericalangle MDA = \sphericalangle MBA = \frac{1}{2}$ măs. arc AM. Unghiurile din B sînt complementare, deci $\sphericalangle MRN$ și $\sphericalangle MQP$ sînt complementare. RN este înălțime, iar N ortocentrul lui PQR (R.M.T. XV). **137.** Fie l pe arcul BD. Avem $\sphericalangle AMD + \sphericalangle BMC = \frac{1}{2}$ (măs. arc AD + măs. arc BC) = 90°, deoarece unghiul drept format de coardele $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ este măsurat prin semisuma acelorași arce. Dacă M este pe arcul AD, atunci $\sphericalangle AMD - \sphericalangle BMC = 90°$. **138.** Fie E diametral opus lui A. Avem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DBE$; $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DEB = \frac{1}{2}$ măs. arc AD. Dacă triunghiul ABC este isoscel, rezultă că și triunghiul DBE este isoscel. Construcția: cercul cu raza $\overline{DE}$ intersectează din nou pe $\overline{AE}$ în B, iar DB intersectează cercul în C. Dacă l_4 este latura pătratului înscris, atunci B este interior cercului, exterior sau se confundă cu A, după cum $AD \gtreqless l_4$. *Altă construcție*: se ia C' pe cerc astfel ca $\overline{DC'} = \overline{DE}$, apoi $\overline{AC} = \overline{AC'}$; se unește C cu D și se obține B. (R.M.T. 1923). **139.** Patrulaterul inscriptibil $ABDE$ (fig. 44) ($\sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB = 90°$) dă $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EDC$. Patrula-

terul inscriptibil $ADFC$ dă $\sphericalangle CAF = \sphericalangle CDF$. Adunînd egalitățile, avem $\sphericalangle A = \sphericalangle GDC + \sphericalangle CDF = \sphericalangle GDC + \sphericalangle BDH$, deci $\sphericalangle GDH = 180° - \sphericalangle A$. (R.M.T.V.). **140.** Cercul descris pe $\overline{AB}$ ca diametru. **141.** Unghiul BHC este suplimentul $\sphericalangle A$, iar unghiul BIC este de asemenea constant $\left(90° + \sphericalangle \frac{A}{2}\right)$. Locurile se compun din cercuri care trec prin B și C; locul lui H este simetricul cercului ABC față de latura BC. **142.** Dacă I_a, I_b, I_c sînt cele trei puncte, locul lui I_a este identic cu locul lui I din problema precedentă. Cu ajutorul problemei 29 se arată că și unghiurile BI_bC și BI_cC sînt constante. **143.** Cercul descris pe $\overline{AO}$ ca diametru, dacă A este interior sau pe cercul dat. Dacă A este exterior, locul este un arc de cerc cuprins între tangentele duse din A la cercul (O). **144.** Fie A' diametral opus lui A pe cercul (O) și P punctul al cărui loc se cere (fig. 45). MP trece necontenit prin A', iar $\sphericalangle MPA = 90° - \sphericalangle MAN =$ = const. Segmentul $\overline{AA'}$ se vede din P fie sub unghiul $90° - \sphericalangle MAN$, fie sub unghiul suplimentar. Locul este un cerc întreg. **145.** Dacă A_1 este simetricul lui A față de punctul diametral opus lui, locul este cercul descris pe $\overline{AA_1}$, ca diametru. **146.** Dacă AC și BD sînt tangentele la cercul (M), AM și BM sînt bisectoarele unghiurilor CAT și DBT, unghiurile MAT și MBT sînt complementare, deci unghiurile CAT și DBT sînt suplimentare și $AC \parallel BD$. **147.** Se duce tangenta comună în punctul de contact și se observă unghiurile egale. **148.** În virtutea problemei precedente avem unghiuri alterne interne egale. **149.** Dreptele AB, AC întîlnesc cercul (O') în B', C'. Cu ajutorul problemei precedente se arată că $B'C' \parallel$ $\parallel (\Delta)$ și deci arcele $B'D$, $C'E$ sînt egale (G.M. XXX). **150.** Dreapta AO întîlnește din nou cercul circumscris în D. $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$, avînd aceeași măsură, deci și complementele lor $\sphericalangle BAA'$ și $\sphericalangle DAC$ sînt egale. *Altă soluție.* A_1 este punctul de întîlnire al dreptei AO cu latura $\overline{BC}$; cercul $AA'A_1$ este tangent cercului (O) și sîntem în cazul problemei precedente. **151.** Patrulaterele ABB_1A_1 și AA_1FD_1 (fig. 46) sînt inscriptibile, deci $\sphericalangle BA_1B_1 = \sphericalangle BAB_1$ și $\sphericalangle FA_1D_1 =$ $= \sphericalangle FAD_1$; unghiurile opuse la vîrf în A_1 sînt egale și dreptele A_1B_1, A_1D_1 în prelungire (R.M.T. XIII). **152.** Deoarece $ABCD$ este inscriptibil (fig. 47), avem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle EDC$, prin urmare $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDI = 90°$. Dar în patrulaterul inscriptibil $EDIC$ avem $\sphericalangle CDI = \sphericalangle CEI$ și deci $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CEI = 90°$.

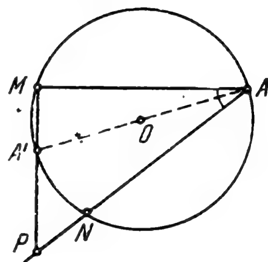


Fig. 45

153. În patrulaterul dat $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ ca avînd aceeași măsură (fig. 48). În patrulaterul inscriptibil $ABA'B'$ avem $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CB'A'$. Rezultă că $\sphericalangle CB'A' = \sphericalangle ACD$, deci $A'B' \| CD$ etc. **154.** Avem $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD'$, $\sphericalangle AC'D' = \sphericalangle ABD$ (fig. 49), deci $\sphericalangle ACD$ și $\sphericalangle AC'D'$ sînt unghiuri interne de aceeași parte, suplimentare; cititorul va studia și cazul cînd secantele se intersectează în interiorul unui cerc. **155.** Să luăm o altă poziție $C'AD'$ a secantei. Avem în grade, arc CC' = arc DD', căci corespund la unghiuri egale, deci suma arcelor nu s-a schimbat trecînd de la CD la $C'D'$. Unghiul CBD este constant căci unghiurile CBA, ABD se măsoară cu jumătăți de arce a căror

Fig. 46

Fig. 47

sumă este constantă. Să presupunem că C vine în A, atunci D vine în D_1. Unghiul constant CBD este egal cu unghiul ABD_1. Ducînd tangenta la cercul ABD_1, se vede că $\sphericalangle ABD_1$ este egal cu suplimentul unghiului format de tangentă și de AD_1. **156.** $\sphericalangle ABC =$

Fig. 48

Fig. 49

$= \sphericalangle ABD = 90°$. **157.** Dacă O_1, O_2, O_3 sînt centrele celor trei cercuri, se va arăta cu ajutorul celor două probleme precendente că $\sphericalangle O_2MO_3$ este egal sau suplimentar cu $\sphericalangle O_2O_1O_3$. **158.** A este punctul comun cercurilor (O_1) și (O_2), B al lui (O_1) cu (O_3), iar C al lui (O_2) și (O_3) (fig. 50). Secantele DMA' și CBA duse prin

M și B determină în cercurile (O_1) și (O_3) coardele paralele AA' și CD (probl. 154). Analog, secantele DNB', CAB duse prin N și A comune lui (O_1) și (O_2) determină în cele două cercuri coardele paralele $\overline{BB'}$ și $\overline{CD}$. Altă soluție se poate da folosind măsura unghiurilor, dar relațiile dintre unghiuri se schimbă după diferite cazuri de figură (G. M. XXXII). **159.** a) Fie D' diametral opus lui D; avem arc $AD' =$ arc. CD' Însă $\sphericalangle ADD' = \frac{1}{2}$ măs. arc AD', iar $\sphericalangle AED = \frac{1}{2}$(măs. arc $D'B$ + măs. arc AD) $= \frac{1}{2}$ măs. arc CD'. Triunghiul ADE este isoscel. b) $\overline{AE} = \overline{AD} = \overline{DC}$; figura $EFCD$ este paralelogram, deci $\overline{CF} \parallel \overline{DD'}$, adică $\overline{CF} \perp \overline{AC}$.

Fig. 50

Fig. 51

Altă soluție. a) Avem $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$ și $DE \perp AC$, deci DAE este isoscel și $ADCE$ este romb. b) $CF \parallel DE$ deoarece DE trece prin mijloacele laturilor AC, AF. **160.** Avem $\sphericalangle EDB = \sphericalangle DCB$ și $\sphericalangle FDC = \sphericalangle DBC$, ca măsurate prin arce egale (fig. 51). Fie B' și C' punctele unde trisectoarele diferite de BD și CD intersectează pe $\overline{EF}$. Deoarece $\sphericalangle BDE + \sphericalangle DBB' = \sphericalangle DCB + \sphericalangle DBC = 90°$, rezultă că $\overline{BB'}$ și $\overline{CC'}$ sînt perpendiculare pe $\overline{EF}$, iar $\overline{DE} = 2\overline{DB'}$ și $\overline{DF} = 2\overline{DC'}$. Însă D este proiecția mijlocului lui $\overline{BC}$, deci mijlocul lui $\overline{B'C'}$ și, prin urmare, al lui $\overline{EF}$. **161.** $\sphericalangle IAC = 45° = \sphericalangle OAP$, deci $\overline{OP} \perp \overline{OA}$ (fig. 52). Ducînd tangenta în A, arcele AF și AE au aceeași măsură, deci $IF \parallel OE$. Rezultă că $OEIG$ este paralelogram, deci $\overline{GI} = \overline{OE} = \overline{OA}$; $\overline{GO} = \overline{IE} = \overline{ID}$, deci $GD \parallel OA$. **162.** Unghiul A fiind constant, punctul A descrie un arc de cerc, care trece prin P și Q. Dreapta AC intersectează acest cerc într-un punct fix R. **163.** Perimetrul este suma distanțelor de la A la punctele de contact cu O ale laturilor Ax și Ay. $\sphericalangle BOC = 90° - \frac{1}{2} \sphericalangle A$. **164.** Patrulaterul

$ACMN$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle BMN = \sphericalangle A = 90°$. **165.** Din triunghiurile egale GAB, GCB se deduce că $\sphericalangle GAB = \sphericalangle GCB = \sphericalangle CFE$. **166.** a) Avem $\sphericalangle BED = \sphericalangle BCA = \sphericalangle DBE$ (fig. 53). b) Cea de-a doua proprietate rezultă din egalitățile $\sphericalangle BED = \sphericalangle EBD = \sphericalangle ECD$. c) Dacă M este proiecția lui O pe $\overline{AB}$

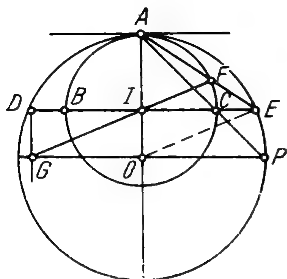


Fig. 52

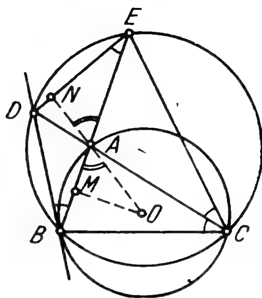


Fig 53

și N intersecția lui $\overline{OA}$ cu $\overline{DE}$, observăm că $\sphericalangle AED = \sphericalangle BCA = \sphericalangle MOA = 90° - \sphericalangle EAN$; unghiurile AED și EAN fiind complementare, $AO \perp DE$. **167.** Fie ET tangenta în E la cercul DCE. Observăm că $\sphericalangle DCE = \sphericalangle TED$ și $\sphericalangle DCE = \sphericalangle ABE$. Deci $\sphericalangle ABE =$

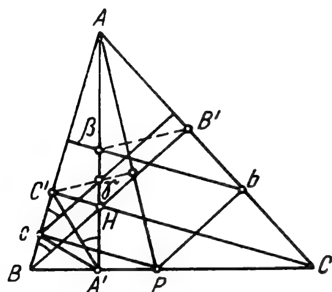


Fig. 54

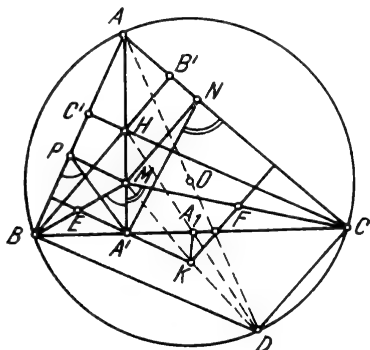


Fig. 55

$= \sphericalangle TED$, de unde ET este tangentă și la cercul BEM. **168.** Patrulaterele $AB'HC'$, $BC'B'C$ sînt inscriptibile, deci $\sphericalangle CAA' = \sphericalangle B'C'H = \sphericalangle B'C'C = \sphericalangle B'BC$. În triunghiurile $AA'C$, $BB'C$ avem două unghiuri egale, deci și $\sphericalangle AA'C = \sphericalangle BB'C = 90°$. **169.** Din patrulaterele inscriptibile $A'BC'H$, $A'CB'H$ se deduce $\sphericalangle HA'C' = \sphericalangle HBC'$, $\sphericalangle HA'B' = \sphericalangle HCB'$. Se va mai observa că $\sphericalangle HBC' = \sphericalangle HCB'$ ca avînd același complement. **170.** Patru-

laterul $BC'B'C$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle AB'C' = \sphericalangle B$, apoi $\sphericalangle B'AO = \sphericalangle A'AB$ (probl. 150). Triunghiul BAA' fiind dreptunghic, rezultă că și $\sphericalangle AB'C' + \sphericalangle B'AO = 90°$, deci $AO \perp B'C'$. **171.** Observăm că $\sphericalangle C'\gamma A' + \sphericalangle C'cA' = \sphericalangle APA' + \sphericalangle AcA'$ (fig. 54) și cum patrulaterul $AcA'P$ este inscriptibil, tot astfel va fi și $C'cA'\gamma$. Rezultă că $\sphericalangle Ac\gamma = \sphericalangle C'A'H = \sphericalangle ABH$ și dreptele BB', $c\gamma$ sînt paralele (G. M. XXIX). **172.** a) Patrulaterele inscriptibile $MPBA'$, $MNCA'$ (fig. 55) dau $\sphericalangle BMA' = \sphericalangle BPA'$ și $\sphericalangle CMA' = \sphericalangle CNA'$. Deoarece unghiurile din partea a doua a egalităților sînt exterioare triunghiurilor APA' și ANA', adunînd egalitățile, obținem $\sphericalangle BMC = \sphericalangle A + \sphericalangle PA'N$. b) Trebuie ca $\sphericalangle BMC = 2\sphericalangle A = \sphericalangle BOC$, O fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC, deoarece ultimul este unghi la centru cuprinzînd același arcBC ca și $\sphericalangle A$. Punctul M se află la intersecția arcului de cerc BOC cu înălțimea $\overline{AA'}$. c) Fie D punctul diametral opus lui A pe cercul ABC. Unghiurile ABD și ACD fiind drepte, $MPBD$ și $MNCD$ sînt trapeze dreptunghice. Perpendicularele din E și F pe $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ se întîlnesc la mijlocul lui $\overline{MD}$. Locul este mediatoarea lui $\overline{BC}$. d) HD trece prin mijlocul A_1 al lui $\overline{BC}$. În triunghiul DMH, KA_1 unește mijloacele laturilor (Olimpiada matematică 1954, R.M.F.VI). **173.** Din probl. 154 rezultă că EF', $E'F$ sînt paralele la AB, deci cele două puncte descriu același loc: diametrul cercului (O) perpendicular pe direcția dată. **174.** Dreptele Ax, Ay tangente cercurilor și patrulaterul $ACOD$ inscriptibil ne dau $\sphericalangle OEC = \sphericalangle OCx = \sphericalangle ADO$ și $\sphericalangle OED = \sphericalangle ODy = \sphericalangle ACO$. Rezultă $\sphericalangle OEC + \sphericalangle OED = \sphericalangle ADO + \sphericalangle ACO = 180°$. **175.** Fie M simetricul lui E față de A. Dreptele BM și AF sînt paralele (probl. 154). BM fiind perpendiculară pe BE va fi și $AF \perp BE$, deci va împărți unghiul A în două părți egale. **176.** Dacă R este diametral opus lui P, $QR \| AB$, deci bisectoarele trec prin extremitățile diametrului perpendicular pe AB. **177.** $\overline{DE}$ este diametrul cercului (O), perpendicular pe $\overline{BC}$, $\overline{DG}$ și $\overline{FG}$ sînt înălțimi în triunghiul DEF, iar $\overline{EG}$ va fi a treia înălțime. Dacă L este piciorul ei, unghiul DLE este drept și locul este chiar cercul (O) (G. M. XXX). **178.** Dacă notăm cu E și F mijloacele laturilor $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ (fig. 56), atunci paralela prin E la (Δ_1), (Δ_2) și perpendiculara prin F pe (Δ_1), (Δ_2) trec prin P, iar $\sphericalangle EPF = 90°$. Locul este cercul de diametru $\overline{EF}$. (G.M.F.VI, seria B). **179.** Patrulaterul BCB_1C_1 este inscriptibil, iar $\overline{BC}$ este diametrul cercului, deci locul lui B și C este chiar acest cerc. Dacă notăm cu H ortocentrul, $\sphericalangle B_1HC_1$ are ca măsură $\frac{1}{2}(\text{arc } BC + \text{arc } B_1C_1) = 90° + \frac{\text{arc } B_1C_1}{2} = \text{const.}$

Locul lui A este un arc de cerc ce trece prin B_1 și C_1 (R.M.T.V.). **180.** a) Se observă că $\sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle AA_1O = \sphericalangle OAA_1$. Deoarece $OA_2 \| AP$, figura $OAPA_2$ este trapez isoscel și $\sphericalangle APA_2 = \sphericalangle OAP = \sphericalangle AA_1O$. Rezultă că OA_1PA_2 este paralelogram, deci A_1, A_2 sînt simetrice față de M. b) Segmentele paralele BP și OB_2 au aceeași mediatoare. Același lucru îl putem spune despre CP și OC_2. Intersecția ω a acestor două drepte este centrul comun al cercurilor BPC și B_2OC_2 (G. M. XXXII). **181.** Se arată că triunghiurile ACM' și BCM sînt egale. Se deduce că și $\sphericalangle MCM' =$

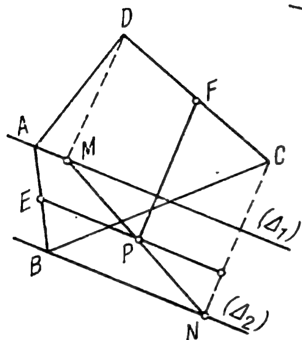


Fig. 56

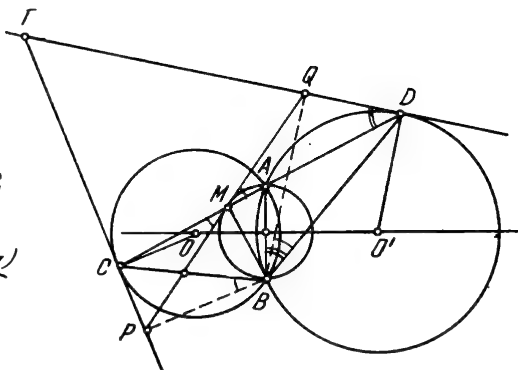


Fig. 57

$= \sphericalangle ACB$, deci triunghiurile CMM' și CAB sînt în același timp echilaterale. **182.** Patrulaterele $MNAa$, $MNBb$ sînt inscriptibile. Din ele avem $\sphericalangle ANa = \sphericalangle AMa$, și $\sphericalangle MbN = \sphericalangle MBN$ dar, în cercul dat, avem $\sphericalangle MBN = \sphericalangle AMa$, deci $\sphericalangle ANa = \sphericalangle MbN$. **183.** Fie M punctul al doilea de intersecție al secantei CD cu cercul de diametru $\overline{AB}$ și T intersecția tangentelor în C și D la cercurile respective (fig. 57). Avem $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADT$ și $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACT$, de unde $\sphericalangle CBD + \sphericalangle T = 180°$. Patrulaterul $PBQT$ fiind și el inscriptibil, rezultă $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle CBD$, deci $\sphericalangle CBP = \sphericalangle DBQ$. Patrulaterele inscriptibile $BMCP$, $BMQD$ ne dau $\sphericalangle CMP = \sphericalangle CBP$; $\sphericalangle QMD = \sphericalangle QBD$, de unde $\sphericalangle CMP = \sphericalangle QMD$; punctele P, M, Q sînt coliniare. Apoi $\sphericalangle MBD = \sphericalangle QMD + \sphericalangle QDM$ ca avînd același supliment $\sphericalangle MQD$. Deducem $\sphericalangle QMD = \sphericalangle MBA$, deci PQ este tangentă în M la cercul de diametru $\overline{AB}$ (G. M. XXXIV). **184.** Cercurile care trec prin B și C se intersectează în A' pe $\overline{BC}$ și încă în I; ele intersectează laturile $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ în C' și B'. Se va observa că patrulaterul $AB'IC'$ este inscriptibil. **185.** Centrul cercului descrie o dreaptă. Punctul fix este proiecția lui P pe această dreaptă. **186.** Fie N diametrul opus

lui A (fig. 58). Avem $\sphericalangle PMA = \sphericalangle SMA = \sphericalangle SNA = 90° - \sphericalangle SAN =$ const. Locul este cercul din care face parte arcul AMP capabil de unghiul $ANS =$ const. (R.M.T.IV). **187.** Notăm cu N simetricul lui M față de (Δ); luăm B diametral opus lui A pe cercul dat și C simetricul lui B față de P (fig. 59). Avem $\sphericalangle BMA = 90°$, deci $BM \| (\Delta)$; rezultă $CN \| (\Delta)$. Locul este cercul cu diametrul $\overline{AC}$. El trece prin punctul de intersecție al cercului (O) cu dreapta BPC (G. M. LII). **188.** Triunghiurile APQ,

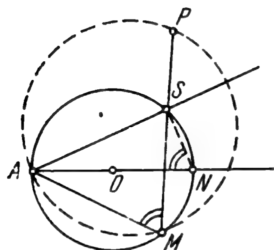


Fig. 58

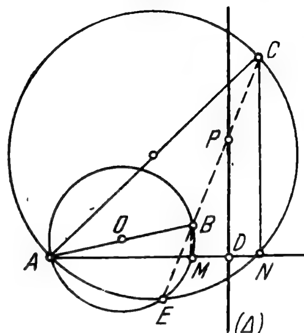


Fig. 59

APR sînt egale. Se va observa în special că $\sphericalangle QAR = 2\sphericalangle QAP$. **189.** Cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale (cercurile lui Toricelli) se intersectează într-un punct O (centru izogon), așa că $\sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = \sphericalangle AOB = 120°$. Dreptele care unesc centrele formează unghiuri de 60°. **190.** Avem $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOA' = 120° +$

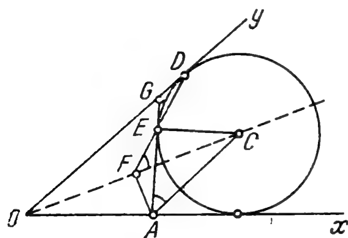


Fig. 60

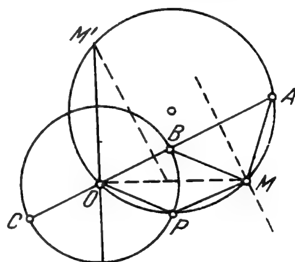


Fig. 61

$+ 60° = 180°$. **191.** Fie F punctul unde DE intersectează pe OC, G unde AE intersectează pe Oy (fig. 60). F este proiecția lui A pe OC, deci fix căci $\sphericalangle GAx = \sphericalangle GOx + \sphericalangle OGA = 2(\sphericalangle DOC + \sphericalangle ODF) = 2\sphericalangle DFC$, deci $\sphericalangle EAC = \sphericalangle EFC$ și, prin urmare, patrulaterul $ACEF$ este inscriptibil. **192.** Unghiul MAO este drept, deci locul este perpendiculara din A pe AO. **193.** Fie B punctul unde OA

intersectează cercul (O) (fig. 61). Triunghiurile MOP, MOB sînt egale, deci $\overline{MA} = \overline{MP} = \overline{MB}$. Locul este mediatoarea lui $\overline{AB}$. Fie C punctul diametral opus lui B. Locul punctului M', unde bisectoarea unghiului POC intersectează cercul POA, este mediatoarea lui $\overline{AC}$. **194.** Unghiurile OAB, OBA sînt complementare ca jumătăți de unghiuri suplimentare. **195.** Se arată că $\sphericalangle AMB$ este egal cu $\sphericalangle B$ sau suplimentarul său. Locul este cercul tan-

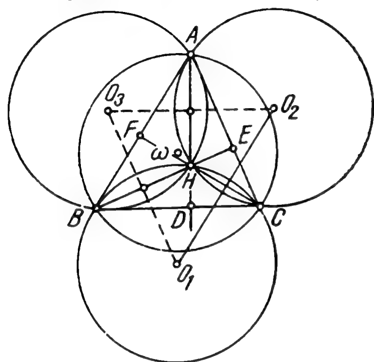


Fig. 62

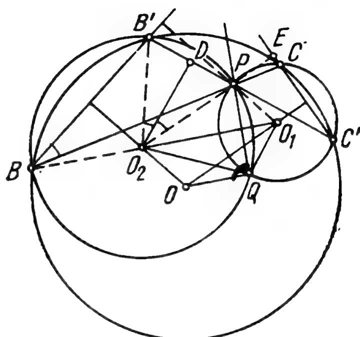


Fig. 63

gent în B la BC și care trece prin A. **196.** $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ sînt bazele, I punctul de întîlnire a laturilor neparalelele $\overline{AB}$, $\overline{DC}$. Avem $\sphericalangle AID = 180° - 2\sphericalangle ADC = 180° - \sphericalangle AOC$, O fiind centrul cercului. Patrulaterul $IAOC$ este inscriptibil. Locul este arcul AIC din cercul AOC (G. M. XXXI) **197.** Fie O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor (fig. 62), A, B, C punctele comune lui (O_2, O_3), (O_3, O_1); (O_1, O_2); D, E, F intersecțiile perechilor de drepte (AH, BC); (BH, CA); (CH, AB). Punctele O_1 și O_2 sînt simetricele lui O_3 față de mijloacele segmentelor $\overline{HB}$ și $\overline{HC}$, deci $\overline{O_1O_2} \| \overline{AB}$, $\overline{O_1O_2} = \overline{AB}$. Deoarece $\overline{HC} \perp \overline{O_1O_2}$, rezultă $\overline{CH} \perp \overline{AB}$. Deducem că H este ortocentrul triunghiului $\overline{ABC}$ și centrul cercului circumscris lui $O_1O_2O_3$ a cărui rază este $\overline{O_1H}$; mai deducem că triunghiurile ABC și $O_1O_2O_3$ sînt egale, deci centrul circumscris lui ABC este egal cu cel circumscris lui $O_1O_2O_3$ și deci egal cu cercurile date. **198.** Fie D piciorul perpendicularei din O_2 pe $B'C'$ și E intersecția lui O_2P cu CC' (fig. 63). Avem $\sphericalangle B'BP = \frac{1}{2}\sphericalangle B'O_2P = \sphericalangle DO_2P$, în cercul (O_2) și $\sphericalangle B'BP = \sphericalangle PC'C$ în cercul (O). Triunghiurile O_2PD și $C'PE$ au unghiurile opuse la vîrf egale și unghiurile din O_2 și C' egale, deci $\sphericalangle PEC' = \sphericalangle PDO_2 = 90°$. Rezultă $O_2P \| OO_1$. La fel se arată că $O_1P \| OO_2$, deci

OO_2PO_1 este paralelogram; OQO_1O_2 este trapez isoscel (din egalități evidente de triunghiuri). De aici rezultă ce se cere în enunț (R.M.T.IV). **199.** Fie P intersecția tangentei în C la cercul (O') cu a doua tangentă dusă prin O la același cerc (fig. 64). Se observă că $\sphericalangle PO'O = \frac{1}{2} \sphericalangle CO'B = \sphericalangle PCA$ și deci patrulaterul $PCO'A$ este inscriptibil. P este punctul fix. **200.** $\sphericalangle PQO = \sphericalangle PMO =$ const. Dreapta PQ intersectează într-un punct fix cercul descris pe $\overline{ON}$ ca diametru. **201.** Se duc cercurile $A'BC$, $AB'C$ care se intersectează în H. Se observă că $\sphericalangle AHB = 180° - \sphericalangle C$ și deci cercul ABC' trece tot prin H. Pentru a demonstra că H este ortocentru se observă că $\sphericalangle B'HC = \sphericalangle A'HC = \sphericalangle C$ și deci în triunghiul $HA'B'$, $\overline{HC} \perp \overline{A'B'}$. (Cercurile considerate BHC, CHA, AHB se numesc cercurile lui Carnot). **202.** Fie A' simetricul lui A în raport cu mijlocul lui $\overline{BC}$. Se va observa că $\overline{HA'}$ este un diametru al cercului BCA' și deci locul proiecției lui H pe mediana $\overline{AA'}$ este simetricul cercului ABC în raport cu BC (cercul lui Carnot, G. M. VIII). **203.** Se va arăta că triunghiurile $A'BN$ și $A'CM$ sînt egale. Pentru aceasta se va observa că în cercurile ABA', ACA', coardele $\overline{BA'}$, $\overline{A'M}$ pe de o parte și $\overline{CA'}$, $\overline{A'N}$ pe de altă parte, sînt egale. În sfîrșit din patrulaterele $AA'BM$, $AA'CN$ se deduce $\sphericalangle CA'M = \sphericalangle BA'N$. **204.** Sînt două cazuri: punctele formează un patrulater convex sau nu. În primul caz, dacă $\sphericalangle DCB > 180° - \sphericalangle DAB$, cercul DAB conține pe C și cercul BCD pe A; deoarece nu putem avea decît $\sphericalangle ADC < 180° - \sphericalangle ABC$, cercul ABC lasă pe D, ADC pe B în afară. În acest caz avem cîte două cercuri de fiecare speță. În al doilea caz, fie D interior triunghiului ABC; atunci numai cercul ABC conține pe D; celelalte cercuri lasă punctele corespunzătoare în afară. **205.** Fie E, F punctele de contact ale laturilor opuse AB, CD; G, H ale laturilor AD, BC. Avem $EF \perp GH$. Se va observa că

$$\text{măs.} \sphericalangle A + \text{măs.} \sphericalangle C = \frac{1}{2}(\text{arc } EHG - \text{arc } EG) + \frac{1}{2}(\text{arc } FEH - \text{arc } FH) = \text{cerc} - (\text{arc } EG + \text{arc } FH) = \frac{1}{2} \text{ cerc}.$$

206. Fie P intersecția tangentelor în A și M, iar S intersecția tangentelor în D și N. Patrulaterele $APOM$ și $SDON$ fiind inscriptibile, avem $\sphericalangle P + \sphericalangle AOM = \sphericalangle S + \sphericalangle DON = 180°$. Din egalitățile arcelor

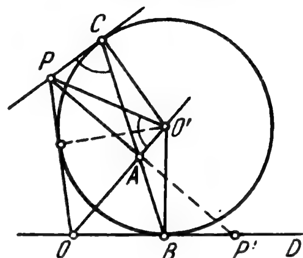


Fig. 64

AM și CN rezultă $\sphericalangle\ AOM = \sphericalangle\ NOC = \sphericalangle\ S$ și deci $\sphericalangle\ P + \sphericalangle S = 180°$. **207.** a) Se observă că patrulaterele AA_1BB_1 și CC_1DD_1 sînt inscriptibile (fig. 65). Se arată că unghiurile opuse ale patrulaterului $A_1B_1C_1D_1$ sînt suplimentare. b) Mediatoarea segmentului $\overline{AB}$ conține două centre O_1, O_2, iar mediatoarea lui $\overline{C_1D_1}$, alte două centre O_3, O_4. Se arată că $AB \| C_1D_1$ și se continuă astfel.

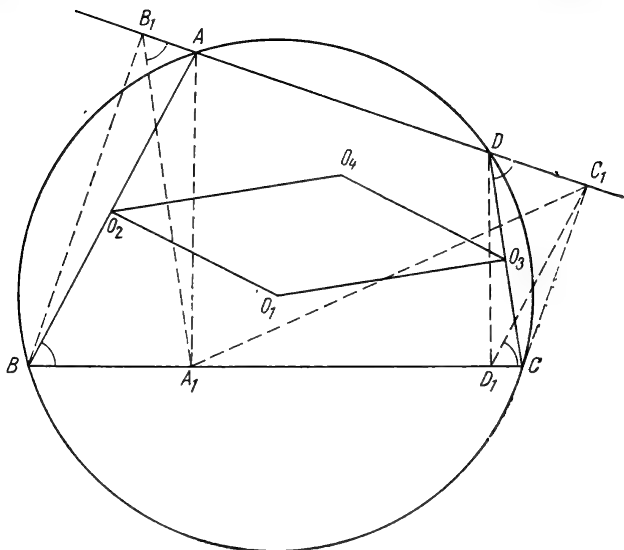


Fig. 65

208. Dreptele AF, AE întîlnesc cercul în M și N, iar dreapta EF întîlnește cercul în P și R. Se va arăta că figura $DPNR$ este un dreptunghi. Diagonala PR sau EF trece prin mijlocul lui $\overline{DN}$, iar punctele D și N sînt diametral opuse pe cerc (G. M. XXXII). **209.** Punctul D descrie un cerc (O) ce trece prin A și E. Observăm că $\sphericalangle EDC = 180° - \sphericalangle\ BDC = 180° - \sphericalangle\ BAC =$ const, deci DC intersectează cercul (O) într-un punct fix. **210.** Patrulaterele $ABLP$, $BCML$, $CDNM$ și $DAPN$ fiind inscriptibile, avem $\sphericalangle DNM + \sphericalangle BLM = (180° - \sphericalangle DCM) + (180° - \sphericalangle BCM) = 360° - \sphericalangle\ DCB$; analog $\sphericalangle\ DNP + \sphericalangle\ BLP = 360° - \sphericalangle BAD$ și adunînd parte cu parte aceste două egalități, obținem $\sphericalangle\ PNM + \sphericalangle PLM = \sphericalangle DCB + \sphericalangle DAB = 180°$. **211.** a) Fie O_1, O_2 centrele cercurilor (BC) și (CB) (fig. 66). Observăm că $\sphericalangle\ AM_2M = \sphericalangle\ O_1CO_2$, iar $\sphericalangle\ AM_1M = \sphericalangle\ O_1BO_2$. Din triunghiurile egale O_1CO_2 și O_1BO_2 deducem $\sphericalangle\ O_1CO_2 = \sphericalangle\ O_1BO_2$. Deci $\sphericalangle\ AM_2M = \sphericalangle\ AM_1M$ și patrulaterul AM_1M_2M este inscriptibil. b) Se va

arăta că A și Q sînt simetrice față de mediatoarea laturii $\overline{BC}$ (G.M. XXXI). **212.** Fie D un punct în interiorul triunghiului, așa că $\overline{AD} = \overline{CM}$ și ca $\sphericalangle BAD = \sphericalangle \overline{BCM}$. Se deduce că triunghiul BDM

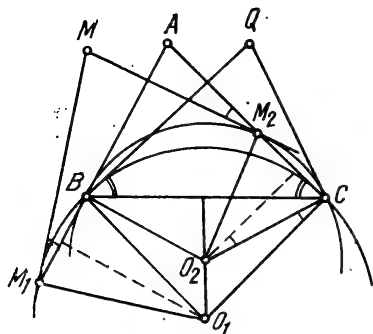


Fig. 66

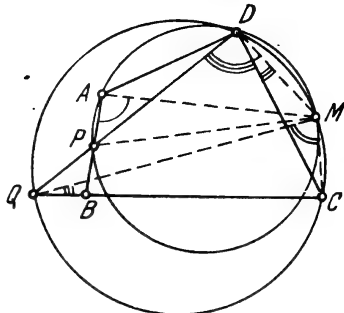


Fig. 67

este echilateral și pentru că $\overline{AM} = \overline{AD} + \overline{DM}$ punctul D se găsește pe $\overline{AM}$. Locul lui M este arcul BC. **213.** Locul este cercul ABC (fig. 67). Demonstrația depinde de figură. În orice caz, din patrulaterele inscriptibile $MDAP$, $MDQC$ se deduce că patrula-

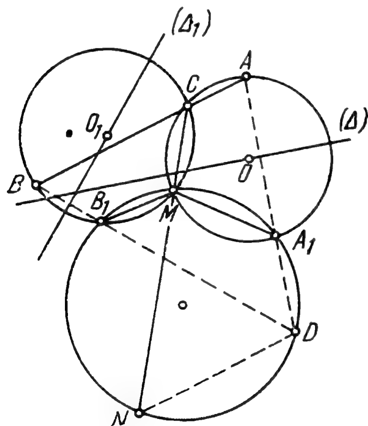


Fig. 68

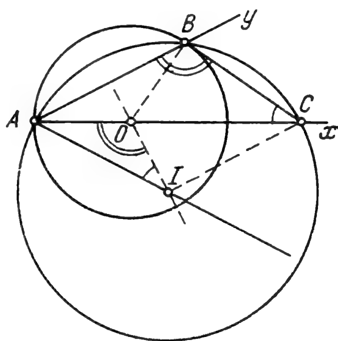


Fig. 69

terul $MABC$ este și el inscriptibil. **214.** Fie $\overline{AB}$ diametrul cercului (O) perpendicular pe D; C punctul de contact cu (O), C' punctul de contact cu (D) al unui cerc din problemă, T punctul unde tangenta comună intersectează pe (D). Avem $\overline{TC} = \overline{TC'}$, deci $\overline{CC'}$ este paralelă cu bisectoarea exterioară a unghiului CTC', sau

este bisectoarea exterioară a unghiului format de $\overline{CT}$ cu perpendiculara coborîtă din C pe $\overline{AB}$. Deci $\overline{CC'}$ trece prin A sau B. **215.** Toate cercurile concentrice cu cel care trece prin punctele date răspund la problemă. **216.** Se pot duce patru cercuri. Iată unul: prin B, C, D se duce un cerc de centru O, OA intersectează cercul în E, F este mijlocul lui AE; cercul de centru O și rază $\overline{OF}$ răspunde la problemă. Dacă punctele date se află pe un cerc, cercurile concentrice cu el sînt soluții ale problemei. **217.** a) Fie A_1 și B_1 simetricele punctelor A și B, respectiv față de dreptele (Δ) și (Δ_1), iar D intersecția dreptelor AA_1, BB_1 (fig. 68). Patrulaterele $ACMA_1$ și $BCMB_1$ sînt inscriptibile. Deci $\sphericalangle A_1MC = 180° - \sphericalangle CAA_1$, iar $\sphericalangle B_1MC = 180° - \sphericalangle CBB_1$, astfel că $\sphericalangle A_1MB_1 = \sphericalangle CAA_1 + \sphericalangle CBB_1 = 180° - \sphericalangle A_1DB_1$ și M se află pe cercul circumscris triunghiului A_1B_1D. b) Fie N punctul în care secanta comună cercurilor (O) și (O_1) intersectează a doua oară cercul A_1B_1D. Avem $\sphericalangle B_1DN = \sphericalangle B_1MN = \sphericalangle B_1BC$. DN este deci paralelă cu AB și cum D este fix, N va fi fix. Dacă C este exterior segmentului $\overline{AB}$, se va raționa pe figura corespunzătoare (G.M. XXXIII). **218.** Demonstrația depinde de natura unghiului xAy și de situația lui O pe $\overline{Ax}$. Vom da indicații pentru cazul cînd $\sphericalangle xAy < 45°$ și O este chiar pe $\overline{Ax}$, nu pe prelungire (fig. 69). Fie I centrul cercului $A'BC$. Se va observa că IO este mediatoarea lui $\overline{AB}$. Se va deduce prin măsură de unghiuri că $\sphericalangle AIO = \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle AOI = \sphericalangle ABC$, deci $\sphericalangle BAC$ sau $\sphericalangle yAx = \sphericalangle xAI$. Prin urmare I descrie simetrica lui Ay în raport cu Ax. **219.** Cercurile BCE, ABF se intersectează în M (fig. 70). Se va observa că $\sphericalangle CEM = \sphericalangle CBM = \sphericalangle FAM$, deci și cercul ADE trece prin M; de asemenea $\sphericalangle MDF = \sphericalangle BEM = \sphericalangle MCF$, deci și cercul CDF trece prin M. **220.** Se va arăta că cele patru cercuri (fig. 70), luate în grupe de cîte trei, satisfac condițiile problemei 157. **221.** Se va observa că $\sphericalangle CME = \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle CMF = \sphericalangle ADC$. **222.** Fie O centrul primului cerc, P al doilea punct de intersecție, A' proiecția lui A pe

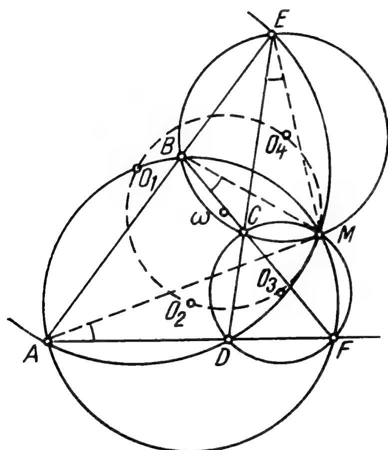


Fig. 70

D, M' diametral opus lui M în (O). Punctele C, A, M' sînt coliniare; apoi deoarece $\overline{AA'} \| \overline{MM'}$, $\overline{CO}$ trece prin mijlocul lui $\overline{AA'}$; trece însă și prin mijlocul lui $\overline{AP}$, deci $\overline{A'P} \| \overline{CO} \perp \overline{AP}$. Locul este cercul descris pe $\overline{AA'}$ ca diametru (G. M. III). **223.** Se va observa că patrulaterul $OPAS$ este inscriptibil, deci $\overline{OP} \perp \overline{SP}$. Locul lui P și al lui P' este cercul descris pe $\overline{OS}$ ca diametru (G. M. XVIII). **224.** Dreptele $P'B_1$ și $Q'C_1$ întîlnesc tangenta în A' la cercul (O), în D și E (fig. 71). Patrulaterul $DA'BP'$ este inscriptibil, deoarece $\sphericalangle\, BP'B_1 = \sphericalangle\, BA'D = \frac{1}{2} \sphericalangle A$, deci $\sphericalangle\, BA'D + \sphericalangle\, BP'D = 180°$. De asemenea $EA'Q'C$ este inscriptibil, Rezultă $\overline{BD} \perp \overline{BC}$; $\overline{CE} \perp \overline{BC}$, iar triunghiurile dreptunghice BDB_1 și CEC_1 sînt egale. Deci $\overline{BB_1} = \overline{CC_1}$. Demonstrație analogă pentru $\overline{B_2C_2}$ (G. M. XXX). **225.** Fie O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABE, CAD, CEF. Aceste cercuri au un punct comun M (probl. 219). Se observă că $\sphericalangle\, O_1O_2O_3 = \sphericalangle\, AME = \sphericalangle\, DBF$ etc. (G.M. VIII). **226.** Fie R al doilea punct comun al cercurilor KLQ, KNP (fig. 72); se arată că toate cercurile din enunț, cum și cercurile LMP, MNQ trec prin R (G.M. III). **227.** Cele patru cercuri se întîlnesc într-un punct ω (probl. 219). Cele patru

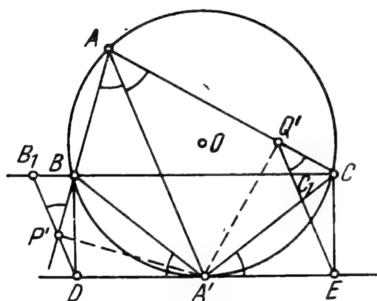


Fig. 71

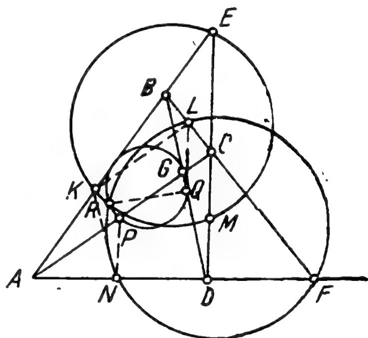


Fig. 72

centre ale acestor cercuri sînt patru puncte unde se întîlnesc cîte trei diametre; aceste patru centre se găsesc cu ω pe un cerc (Ω) (probl. 220). Pe fiecare din cele patru cercuri există cîte un punct unde se întîlnesc trei diametre și aceste patru puncte se găsesc pe (Ω) (G.M.V.). **228.** a) Din patrulaterele inscriptibile $CLPM$

$DMPN$ şi $ABCD$ (fig. 73), deducem $\sphericalangle LCP = \sphericalangle LMP$; $\sphericalangle NDP = \sphericalangle NMP$; $\sphericalangle LCP = \sphericalangle NDP$. Deci $\sphericalangle LMP = \sphericalangle NMP$ şi se vede că prima proprietate se menţine şi cînd diagonalele nu sînt perpendiculare. b) Avem $\sphericalangle NML = \sphericalangle ADB + \sphericalangle ACB =$

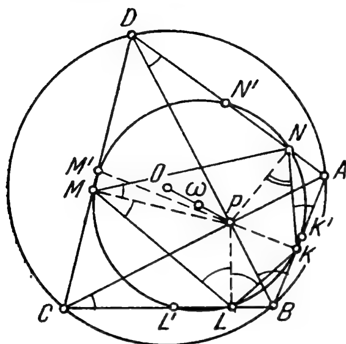


Fig. 73

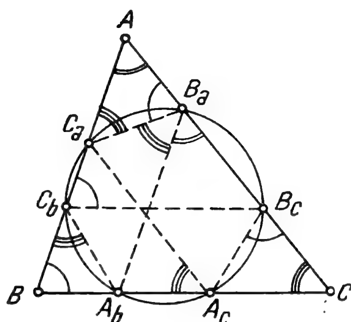


Fig. 74

$=$ măs. arc AB. Apoi $\sphericalangle NKL =$ măs. arc DC şi deci $\sphericalangle NML + \sphericalangle NKL = 180°$. c) $\sphericalangle M'PC = \sphericalangle M'CP = \sphericalangle DBA = \sphericalangle APK$ şi punctele M', P, K sînt coliniare. d) S-a văzut la b) că $\sphericalangle MNK =$ măs. arc $BC = 2 \sphericalangle BDC = \sphericalangle PM'C$. Deci $\sphericalangle MNK = \sphericalangle KM'M$ şi punctele M, M', N, K sînt conciclice. e) Punctul ω trebuie să se găsească la intersecţia mediatoarelor coardelor $\overline{K'K}$, $\overline{L'L}$, $\overline{M'M}$ şi $\overline{N'N}$ (G.M. XXXI). **229.** Fie B_aC_a antiparalela înscrisă în unghiul A; C_bA_b, A_cB_c dreptele analoge (fig. 74). Grupurile de puncte (B, C, B_a, C_a) (C, A, C_b, A_b), (A, B, A_c, B_c) sînt prin construcţie conciclice. Patrulaterele $A_bA_cB_cC_b$, $B_cB_aC_aA_c$, $C_aC_bA_bB_a$ sînt trapeze isoscele. Proprietatea cerută rezultă imediat din acestea. **230.** Fie $ABCDE$ pentagonul (fig. 75); ABF, BCG, CDH, DEI, EAK cele cinci triunghiuri; L, M, N, P, Q punctele de întîlnire ale cercurilor circumscrise triunghiurilor de mai sus. Cercurile circumscrise triunghiurilor ABF, BCG, FCI din patrulaterul complet

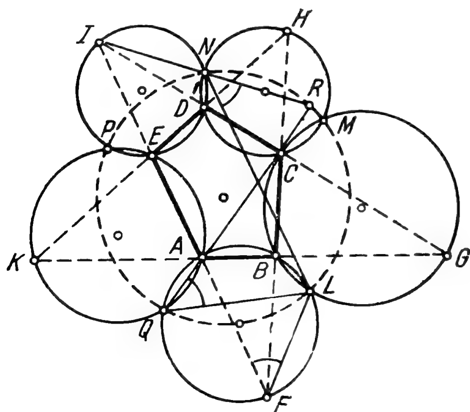


Fig. 75

$ABCIGF$ trec prin punctul lui Miquel, L (probl. 210). De asemenea cercurile circumscrise triunghiurilor CDH, EDI, FCI din patrulaterul complet $CDEFIH$ trec prin punctul N. Deci cercul circumscris triunghiului FCI trece prin L și N. Cercurile ABF, FCI și LNQ au un punct comun L. Dreapta FAI trecînd prin punctul de intersecție F a primelor două cercuri, rezultă că dacă unim punctele A și I cu intersecțiile Q și N ale acestor două cercuri cu al treilea, dreptele QA și IN, prelungite, se întîlnesc într-un punct R al cercului LNQ. Dacă se consideră acum punctele Q, N, E, situate pe laturile triunghiului ARI, cercurile QRN, NEI, QEA trec printr-un același punct (probl. 189) care este P, cercurile NEI, QEA fiind identice cu

Fig. 76

Fig. 77

cercurile DEI, AEK. Deci punctele Q, L, P, N sînt conciclice. Analog se arată că și M aparține cercului pe care se găsesc cele patru puncte.

VI. **231**. Se observă că $\sphericalangle HBC = \sphericalangle A_1AC = \sphericalangle A_1BC$ (fig. 76); deci $\overline{HA'} = \overline{A'A_1}$. Rezultă că $B'C' \parallel B_1C_1$, și $OA \perp B_1C_1$, deoarece A este mijlocul arcului B_1C_1. **232.** A' este piciorul înălțimii și A_1 intersecția lui $\overline{AA'}$ cu cercul ABC (fig. 77). Se observă că $A_2A_1 \parallel BC$ și că $\overline{A_1A_2} = 2\overline{MA'}$. *Altfel:* $BA_2 \parallel CC'$ și $CA_2 \parallel BB'$, deci $BHCA_2$ este paralelogram; HA_2 trece prin M. **233.** Se va observa că în triunghiul A_2AH, $\overline{OA_2} = \overline{OA}$ și $\overline{MA_2} = \overline{MH}$. **234.** Se va observa că AM intersectează pe OH în G; E și F sînt mijloacele segmentelor $\overline{AG}$, $\overline{HG}$. Triunghiurile EFG și GOM sînt egale, deci $\overline{GH} = 2\overline{OG}$; G fiind fix, medianele sînt concurente în G. **235.** Fie O centrul cercului circumscris. Dacă se unește punctul H cu un punct mobil M pe cercul (O), locul mijlocului segmentului $\overline{MH}$ este un cerc (probl. 109), avînd centrul O' la mijlocul lui $\overline{OH}$ și raza egală cu jumătatea razei lui (O). A, B, C fiind pe cercul (O), mijloacele A_1, B_1, C_1 ale segmentelor $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$ sînt pe cercul (O'). Mijloacele segmentelor cuprinse între H și

punctele dimetral opuse lui A, B, C, adică A'', B'', C'' (probl. 231) sînt şi ele pe (O'). Mijloacele distanţelor de la H la punctele unde AH, BH, CH intersectează cercul (O), adică A', B', C' (probl. 231) sînt şi ele pe (O'). **236.** Se arată că O este ortocentrul triunghiului

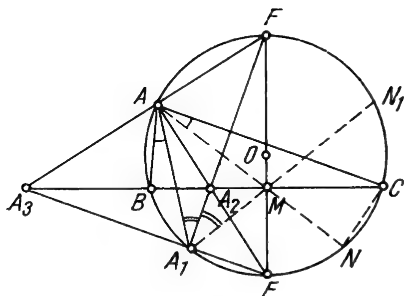


Fig. 78

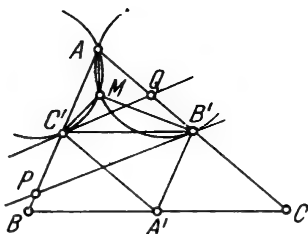


Fig. 79

median $A'B'C'$. **237.** E şi F fiind intersecţiile bisectoarelor interioară şi exterioară cu cercul circumscris, M mijlocul lui $\overline{BC}$, iar N şi N_1 intersecţiile lui AM şi A_1M cu acelaşi cerc (fig. 78), avem $A_1N \parallel BC$; $AN_1 \parallel BC$ şi $\sphericalangle AA_1F = \sphericalangle FA_1N_1$. În triunghiul AA_1M cele trei bisectoare A_1F, AE şi MB sînt concurente în A_2. Dar în triunghiul A_3EF, AE şi A_3M sînt înălţimi, deci FA_1 este a treia înălţime, de unde $A_1A_2 \perp A_1A_3$. **238.** P fiind intersecţia lui $B'P$ cu AB şi Q intersecţia lui $C'Q$ cu AC, să presupunem că M este deasupra ' i $B'C'$ (fig. 79). Avem $\sphericalangle AMB' = 180^\circ - \sphericalangle AB'P$; $\sphericalangle AMC' = 180^\circ - \sphericalangle AC'Q = 180^\circ - \sphericalangle APB'$. Deci $\sphericalangle C'MB' = 360^\circ - (\sphericalangle AMB' + \sphericalangle AMC') = 180^\circ - \sphericalangle A = 180^\circ - \sphericalangle C'A'B'$ (G.M.VI). **239.** Se observă că $\sphericalangle C'MB' = 180^\circ - \sphericalangle A = \sphericalangle AB'P' + \sphericalangle AC'Q$, P şi Q fiind intersecţiile tangentelor în B' şi C' la cercurile AMB' şi AMC' cu $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$. Dar $180^\circ - \sphericalangle A = \sphericalangle AC'Q + \sphericalangle AQC'$, deci $\sphericalangle AB'P = \sphericalangle AQC'$. **240.** Fie O_b simetricul lui A faţă de AB, O_c simetricul lui O faţă de AC. OBO_bA şi OCO_cA sînt romburi, deci $BO_b \parallel CO_c \parallel OA$. Notăm cu E intersecţia (OD, BC). Simetrica lui OD este $EH \parallel OA$. **241.** Razele $\overline{B'D}$ şi $\overline{C'E}$ sînt egale ca fiind jumătăţile razelor cercurilor AHC şi AHB care sînt egale. Se vede uşor că $\overline{DE} = \overline{C'B'}$ şi deci $DEC'B'$ este paralelogram. Fie N şi M mijloacele lui $\overline{DE}$ şi $\overline{B'C'}$. Avem $\overline{BD} = \overline{MN} \# \frac{A'\alpha}{2}$.

242. Fie A_1 punctul al cărui loc se cere. Triunghiurile ABB_1, ACC_1 sînt dreptunghice, deci triunghiurile AB_1C', AC_1B' sînt isoscele. Se deduce că $\sphericalangle C'A_1B' = \sphericalangle C'A'B' = \sphericalangle C'AB'$.

243. Se va observa că $\sphericalangle AMH = \sphericalangle BCH = \sphericalangle BAH$ (G.M. XV). **244.** Punctele O_a, O_b, O_c sînt simetricele centrului cercului circumscris O în raport cu laturile lui ABC. Perechile de puncte (A, O_a), (B, O_b), (C, O_c) sînt simetrice în raport cu mijlocul ω al segmentului $\overline{OH}$, care se știe că este centrul cercului lui Euler (probl. 235). În triunghiul $O_aO_bO_c$, O este ortcentru, iar H centrul cercului circumscris. **245.** Fie $A'B'C'$ triunghiul anticomplementar al lui ABC. Se arată că H este centrul cercului circumscris lui $A'B'C'$ și că A', B', C' sînt diametral opuse lui H în cercurile lui Carnot corespunzătoare. **246.** Fie O_1 centrul cercului circumscris lui BIC, H_1 ortocentrul aceluiași triunghi și I_1 intersecția bisectoarelor exterioare din B și C ale triunghiului ABC (fig. 80). Punctele A, I, I_1 sînt coliniare, iar O_1 este intersecția mediatoarelor lui $\overline{BI}$, $\overline{CI}$, adică mijlocul lui $\overline{II_1}$. Pe de altă parte, $\overline{IH_1} = \overline{2O_1A_1}$, iar bisectoarea din A_1 a triunghiului complementar este paralelă cu AI. Cum centrul cercului lui Euler ω al triunghiului BIC este la $\frac{1}{2}\overline{O_1H_1}$, el se află pe bisectoarea din A_1 a lui $A_1B_1C_1$. **247.** Triunghiul $A'AA_1$ este dreptunghic în A, deci $\overline{AA_1} \perp \overline{AA'}$ și $\overline{AA_1} \parallel \overline{BC}$. Rezultă că $A_2B_2C_2$ este anticomplementarul lui ABC, iar cercul (O) este cercul lui Euler al său (G.M. XXXII). **248.** Dreptele HA' și OA'' sînt egale și paralele (probl. 233), deci $A'HA''O$ este paralelogram. **249.** Fie H ortocentrul lui ABC'. Se va observa că înălțimea $\overline{AH}$ este tangentă cercului ABC' și că $\sphericalangle ABC = \sphericalangle HBC$. Deci H fiind simetricul lui A în raport cu $\overline{BC}$ și centrul cercului ABC' fiind pe paralela din A la $\overline{BC}$, centrul cercului celor nouă puncte se va găsi pe $\overline{BC}$ (probl. 248). **250.** Se va observa că figura $BCED$ este un dreptunghi. $AHCE$, $BDH'P$ și $AHPH'$ sînt paralelograme. Mijlocul lui $\overline{HH'}$ este mijlocul lui $\overline{AP}$. Locul este un cerc. **251.** $\overline{AA'}$, $\overline{CC'}$ sînt cele două înălțimi (fig. 81). Simetricele lor în raport cu dreptele paralele AM, CL se intersectează în D. Fie I intersecția lui AM cu CD. Avem $\sphericalangle ADC = \sphericalangle DIM - \sphericalangle DAM = 180° - (\sphericalangle LCC' + \sphericalangle MAA') = 180° - (\sphericalangle LCA - 90° + \sphericalangle A) - (\sphericalangle MAC - 90° + \sphericalangle C) = \sphericalangle B$. Deci

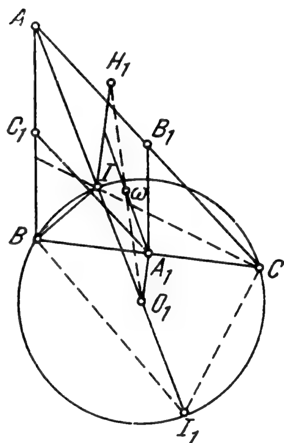


Fig. 80

D se găsește pe cercul circumscris triunghiului ABC (G.M.X) **252.** Demonstrația depinde de figură. Pentru un punct D situat în interiorul unghiului C pe arcul AB, fie I și J două puncte ale bisec-

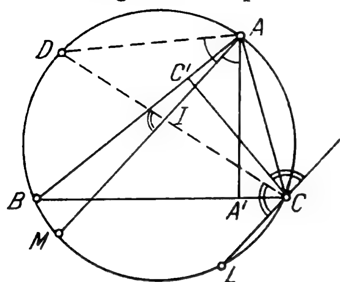


Fig. 81

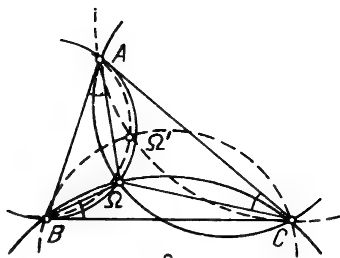


Fig. 82

toarei unghiului DAA' și bisectoarei unghiului DBB'. Avem

$$\sphericalangle IAB = \frac{\sphericalangle DAA'}{2} - (90^\circ - \sphericalangle B) = \frac{\sphericalangle DAB - (90^\circ - \sphericalangle B)}{2};$$

$$\sphericalangle ABJ = 90^\circ - (\sphericalangle A + \frac{1}{2} \sphericalangle DBB') = 90^\circ - (\sphericalangle A + \sphericalangle DBA).$$

Se observă că $\sphericalangle IAB - \sphericalangle ABJ = \sphericalangle C + \sphericalangle A + \sphericalangle B - 180^\circ = 0$. **253.** Se observă că $\sphericalangle A\gamma B' = \sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB' = \sphericalangle C\gamma B' = \sphericalangle \gamma CB$. Deci γBC este isoscel (G.M. VI). **254.** Punctul Ω este definit de relațiile unghiulare $\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega BC =$

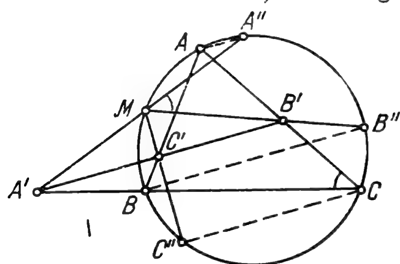


Fig. 83

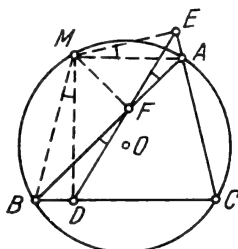


Fig. 84

$= \sphericalangle \Omega CA$, iar Ω' de relațiile $\sphericalangle \Omega' BA = \sphericalangle \Omega' AC = \sphericalangle \Omega' CB$ (fig. 82). **255.** Fie M cel de-al doilea punct comun cercurilor (BA), (CA). Se arată că $\sphericalangle BMC = 2 \sphericalangle A$. **256.** Fie M punctul în care se întîlnesc dreptele $A'A''$, $B'B''$ (fig. 83). Arcele BA'', AB'' sînt egale, coardele $\overline{AB}$, $\overline{A''B''}$ de asemenea egale. Se deduce că $\sphericalangle A''MB'' = \sphericalangle ACB$, deci M se află pe cercul ABC. **257.** Va trebui să se demonstreze că $\sphericalangle DFB = \sphericalangle AFE$ (fig. 84). Se va observa că în patrulaterele inscriptibile $MDBF$ și $MAEF$, $\sphericalangle DFB = \sphericalangle DMB$, $\sphericalangle AFE = \sphericalangle AME$; apoi că $\sphericalangle DMB = \sphericalangle AME$,

rezultă din $\sphericalangle DME = \sphericalangle BMA = 180^\circ - \sphericalangle C$. **258.** Generalizarea precedentei; soluție analogă. **259.** Avem $\sphericalangle BAM' = \sphericalangle BMM'$ și $\sphericalangle BMD = \sphericalangle BFD$. Deci $\sphericalangle BAM' = \sphericalangle BFD$ și AM' este paralelă cu DEF. **260.** $A'B'$ este dreapta lui Simson a punctului M față de triunghiul ABD, iar $C'D'$ este dreapta lui Simson față de triunghiul CBD. Ambele drepte trec prin proiecția lui M pe BD. Aceeași demonstrație pentru $A'C'$ și $B'D'$. **261.** *Soluția I.* Fie D, M (fig. 85) punctele unde bisectoarea unghiului A și izogo-

Fig. 85

Fig. 86

nala dreptei AA' taie a doua oară cercul circumscris. Avem arc BA' = arc MC, iar din paralelismul dreptelor AA', BB', CC' rezultă arc BA' = arc $B'A$, arc $A'C$ = arc AC'. Se deduce că $\sphericalangle CBM = \sphericalangle ABB'$, $\sphericalangle BCM = \sphericalangle ACC'$ și BM, CM sînt izogonalele lui BB', CC'. *Soluția II.* Fie M punctul de întîlnire a izogonalei cevienei AA', față de unghiul A, cu cercul circumscris (fig. 85). Din problema precedentă se deduce că dreapta lui Simson a lui M este perpendiculară pe AA', deci și pe paralelele la aceasta, BB' și CC'. Se deduce că perechile de drepte (BM, BB'), (CM, CC') sînt izogonale respectiv față de unghiurile B și C. **262.** *Soluția I.* Se face raționamentul în sens invers ca la soluția *I. Soluția II.* Din problema 259 se deduce că dreapta lui Simson a lui M în raport cu ABC este perpendiculară pe rînd pe izogonalele celor trei drepte AM, BM, CM. **263.** Înălțimea AH întîlnește latura $\overline{BC}$ în A' și cercul ABC în A_1, iar parpendiculara MD din M pe $\overline{BC}$ intersectează cercul circumscris în M'. Dreptele MA_1 și $\overline{BC}$ se întîlnesc în P. Perechile de drepte (PH, PA_1) și (AM', MA_1) sînt egal înclinate pe BC. Dreapta DEF este paralelă cu AM' (probl. 259), deci și cu HP. Ea trece prin mijlocul lui $\overline{MP}$, deoarece triunghiul MDP este dreptunghic, deci trece prin mijlocul lui $\overline{MH}$. Se observă apoi că triunghiul $A'ND$ este isoscel. **264.** Se va arăta $\sphericalangle BMA = \sphericalangle DME$ și egal sau suplimentar cu unghiul C. **265.** Perpendicularele din

M și N pe $\overline{BC}$ întîlnesc din nou cercul circumscris în M' și N' (fig.86). Din problema 259 se deduce că unghiul dreptelor lui Simson ale punctelor M și N este egal cu $\sphericalangle M'AN'$. Dar arc MN=arc $M'N'$. **266.** Fie M și N extremitățile diametrului, H ortocentrul, m și n mijloacele segmentelor $\overline{MH}$, $\overline{NH}$. Prima proprietate rezultă din faptul că dreptele Simson ale punctelor M și N sînt perpendiculare (probl. 265) și trec prin m și n (probl. 263), iar mn este un diametru al cercului lui Euler. Pentru cea de-a doua parte se va arăta că izogonalele cevienelor punctului considerat, față de triunghiul median, sînt perpendiculare pe diametrul mn (probl. 261, 262). **267.** *Soluția I.* Fie M, N punctele unde perpendicularele din P pe BC, $B'C'$ taie din nou cercul. $\sphericalangle MPN$ este egal sau suplimentar cu unghiul dreptelor BC, $B'C'$, deci constant. Dreptele lui Simson în raport cu cele două triunghiuri sînt paralele cu AM și $A'N$, deci fac un unghi a cărui măsură este (arc AA' + arc MN)/2= = const. *Soluția II.* Fie ABC, $A'B'C'$ cele două triunghiuri. Dreptele Simson ale punctului P fac între ele un unghi egal sau suplimentar cu unghiul făcut de izogonalele AP, $A'P$ în raport cu unghiurile A și A', pe care sînt perpendiculare (probl. 261, 262). Se arată apoi că acest unghi este constant. **268.** Se arată că punctele de întîlnire ale celor trei cercuri sînt proiecțiile punctului M pe laturile lui ABC (fig. 87) și se ține seama de teorema lui

Fig. 87

Fig. 88

Simson (probl. 257). **269.** Generalizarea precedentei. Soluție analogă, cu ajutorul problemei 258. **270.** Se va observa că dreptele DM' și DN' sînt dreptele lui Simson ale punctelor M și N în raport cu triunghiul ABC (probl. 263). Deci MM_1 și MN_1 sînt perpendiculare pe $\overline{AC}$ (G.M.X.). **271.** Fie I intersecția ($A'A_1$;

$C'C_1$). Se va observa că $\sphericalangle A'IC' = \sphericalangle ABC$. Rezultă că $\sphericalangle A'IC' + \sphericalangle A'CC' = 180°$. Deci I se găsește pe cercul ABC. Se poate ușor arăta că $\overline{B'I} \perp \overline{AC}$. $A_1B_1C_1$ formează dreapta lui Simson a punctului I în raport cu triunghiul ABC. **272.** Reciproca problemei 256. Se arată că MA', MB' MC' fac același unghi respectiv cu $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Prima parte rezultă deci din teoria lui Simson generalizată (probl. 258). Urmează că patrulaterul $MCA'B'$ este inscriptibil. Deci $\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle A'MC$ sau $\sphericalangle A''MC = \sphericalangle A''AC$ și $A'B'C'$ este paralelă cu AA'' (v. fig. 83). **273.** a) Înălțimile. b) Laturile. c) Perpendicularele duse prin picioarele înălțimilor pe diametrele cercului circumscris care trec prin vîrfurile corespunzătoare. d) Dreptele care trec prin mijloacele laturilor respective și sînt perpendiculare pe bisectoare. e) Dreptele care trec prin mijloacele laturilor respective și sînt paralele cu bisectoarele interioare. **274.** Perpendiculara din M pe $\overline{BC}$ întîlnește din nou cercul (O) în M'. Observăm că $\sphericalangle OAM = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle AOM = 90° - \sphericalangle AM'M = 90° - \sphericalangle EDM = \sphericalangle BDE$. **275.** Luăm un punct E pe xy. Ducem dreapta $AEC \perp ME$ (A și C pe cerc). Pe $\overline{MC}$ ca diametru construim un cerc, care intersectează pe xy în E și F. CF intersectează cercul în B. xy este dreapta lui Simson a punctului M față de ABC. *Altfel.* Se duce o coardă oarecare BC. Perpendiculara din M pe BC taie cercul în N și paralela din N la xy taie din nou cercul în A. Triunghiul este ABC. O infinitate de soluții. **276.** Se duce $AA' \| (D)$, A' fiind pe cercul circumscris (fig. 88). Extremitatea coardei ce trece prin A' și este perpendiculară pe $\overline{BC}$ este punctul căutat. **277.** a) Perpendiculara din A pe $B'C'$ întîlnește cercul în α (fig. 89); $\alpha A' \perp BC$ (probl. 276) și $\sphericalangle A\alpha A' = \sphericalangle(BC, B'C')$ care demonstrează relația cerută. b) Dacă se caută punctul a cărui dreaptă Simson este perpendiculară pe $\overline{A'C'}$, se găsește punctul B', din cauza relației demonstrate mai sus. c) l, m, n, mijloacele segmentelor $\overline{HA'}$, $\overline{HB'}$, $\overline{HC'}$ Dreptele Simson ale punctelor A', B', C' față de triunghiul ABC sînt înălțimile triunghiului lmn. Între triunghiurile ABC, $A'B'C'$ există reciprocitate din cauza primei relații (G.M.XX). **278.** Din relațiile arc $A\alpha$ + arc $B\beta$ + arc $C\gamma = 0$, arc $A\alpha'$ + arc $B\beta'$ + arc$C\gamma' = 0$ deducem arc $\alpha\alpha'$+arc $\beta\beta'$ +arc $\gamma\gamma' = 0$ (G.M. XX). **279.** Fie (Δ) dreapta care împreună cu M formează un triunghi S, din familia triunghiului ABC. Dreapta lui Simson este perpendiculară pe (Δ) oricare ar fi triunghiul (G.M. XX). **280.** Fie M_1 punctul în care perpendiculara din M pe $\overline{BC}$ întîlnește cercul (O),

R punctul de întîlnire a dreptei AA' cu cercul (O), iar R_1 proiecția lui R pe MM_1 (fig. 90). Din egalitățile $\sphericalangle MA'R = 90° = \sphericalangle MR_1R$ se deduce că patrulaterul $MR_1A'R$ este inscriptibil. Deci $\sphericalangle A'R_1M_1 = \sphericalangle A'RM$. Dar $\sphericalangle MRA = \sphericalangle MM_1A$ și deci $R_1A' \| AM_1$. Cum dreapta lui Simson a punctului M este de ase-

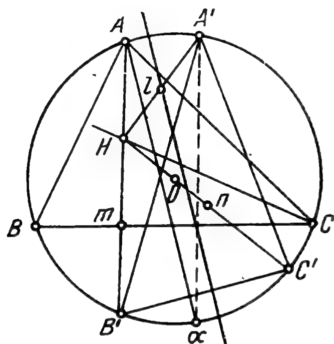


Fig. 89

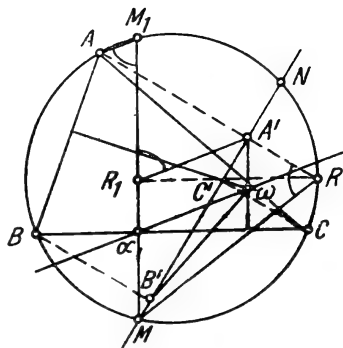


Fig. 90

menea paralelă cu AM_1 (probl. 259), ea va intersecta perpendiculara din A pe $\overline{BC}$ într-un punct ω astfel ca $\overline{\omega A'} = \overline{\alpha R_1}$, α fiind proiecția lui M pe $\overline{BC}$. În mod analog se va arăta că dreapta lui Simson a punctului N trece prin același punct ω. Odată demonstrația de mai sus făcută, se va putea deduce din principiul de continuitate al lui Poncelet că teorema ortopolului subzistă și în cazul cînd dreapta (D) nu întîlnește cercul circumscris în puncte reale. Dealtfel se vor da în capitolele următoare și alte demonstrații pentru această remarcabilă proprietate găsită de J. Neuberg. *Altfel.* Fie P punctul a cărui dreaptă Simson este perpendiculară pe (D). Triunghiurile ABC, MNP sînt triunghiuri S (probl. 277). Punctele A', B', C' se găsesc pe dreptele lui Simson ale punctelor A, B, C în raport cu triunghiul MNP. Acestea sînt perpendicularele pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ și sînt concurente. **281.** Generalizarea precedentei; soluție analogă cu prima soluție dată mai înainte. **282.** Fie M, N punctele în care dreapta (D) întîlnește cercul (O). Dreptele lui Simson ale acestor puncte formează între ele un unghi constant (probl. 265) și trec prin mijloacele segmentelor, $\overline{MH}$, $\overline{NH}$ fixe (probl. 263). Locul este un cerc. **283.** Dreapta (D) întîlnește cercul circumscris în M și N și fie H ortocentrul. Dreptele lui Simson ale punctelor M, N formează între ele un unghi constant (probl. 265) și trec prin proiecțiile punctelor M, N pe $\overline{BC}$, fixe. *Altfel.* Fie ω ortopolul, iar B', C' proiecțiile punctelor

B, C pe (D). Punctele B', C' sînt fixe, iar $\sphericalangle B'\omega C'$ egal cu suplimentul unghiului A, deci constant. În mod analog se arată că și locul izopolului este un cerc (G.M. XXIX). **284.** Proprietatea rezultă din identitatea celor două locuri găsite în cele două soluții date problemei precedente. *Altfel.* Patrulaterul format din punctele B', C', M', N' este inscriptibil (probl. 207). Se dovedește egalitatea unghiurilor $B'\omega C'$ și $B'M'C'$ (G. M. XXXI). În cazul general al izopolului avem proprietatea: se proiectează B și C sub unghiul φ pe (D) în B' și C', iar M și N sub unghiul $\pi-\varphi$ pe $\overline{BC}$ în M', N' (fig. 91). Izopolul de unghi φ al dreptei (D) față de ABC și punctele B', C', M', N' sînt cinci puncte conciclice. **285.** Fie α_1, β_1, γ_1 izopolii de unghi $\pi-\varphi$ ale laturilor lui $A_1B_1C_1$ față de $A_2B_2C_2$, iar α_2, β_2, γ_2 izopolii de unghi φ ale laturilor lui $A_2B_2C_2$ față de $A_1B_1C_1$. Se proiectează A_2, B_2, C_2 sub unghiul $\pi-\varphi$ pe $\overline{B_1C_1}$ în A', B', C', iar punctele B_1, C_1 sub unghiul φ pe laturile $\overline{B_2C_2}$, $\overline{C_2A_2}$, $\overline{A_2B_2}$ în B_a, C_a, B_b, C_b, B_c, C_c. Fie (O_{aa}), (O_{ab}), (O_{ac}) cercurile care trec respectiv prin punctele (B', C', B_a, C_a), (C', A', B_b, C_b), (A', B', B_c, C_c). Aceste cercuri trec prin α_1 (probl. 384). De asemenea punctul β_1 aparține cercurilor analoge (O_{ba}), (O_{bb}), (O_{bc}), punctul γ_1 aparține cercurilor (O_{ca}), (O_{cb}), (O_{cc}), punctul α_2 este comun cercurilor (O_{aa}), (O_{ba}), (O_{ca}), β_2 cercurilor (O_{ab}), (O_{bb}), (O_{cb}), iar γ_2 este comun cercurilor (O_{ac}), (O_{bc}), (O_{cc}). Dacă punctele α_1, β_1, γ_1 se confundă într-un punct ω, de asemenea α_2, β_2, γ_2 vor fi confundate cu acesta. **286.** Cercurile circumscrise celor patru triunghiuri trec prin punctul lui Miquel, M (probl. 219) (fig. 92). Proiecțiile lui M pe cele patru drepte sînt coliniare ca formînd dreptele lui Simson ale punctului M în raport cu cele patru triunghiuri. Ortocentrele celor patru triunghiuri se găsesc pe o dreaptă paralelă cu dreapta lui Simson a punctului M, dusă prin simetricul lui M în raport cu dreapta lui Simson (probl. 263). **287.** Prelungind bisectoarea $\overline{BI}$, se va arăta prin măsură de unghiuri că triunghiul $A'BI$ este isoscel. **288.** Fie I, J centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC și ABD, E mijlocul arcului AB; avem $\overline{EI}=\overline{EJ}=\overline{EA}=\overline{EB}$ (probl. 287), deci $\overline{IJ}$ este perpendiculară pe dreapta care

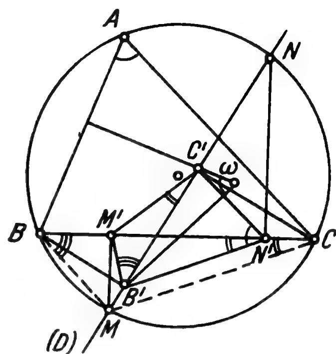


Fig. 91

unește pe E cu mijlocul arcului CD. Se va mai observa că ultima dreaptă este perpendiculară pe cea care unește mijloacele arcelor BC și AD. **289.** Fie α, β, γ, δ, μ, ν mijloacele laturilor și diagonalelor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, G, punctul comun bimedianelor $\alpha\gamma$ și $\beta\delta$, λ intersecția diagonalelor $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ iar O centrul cercului circumscris (fig. 93). Fie K simetricul punctului O față

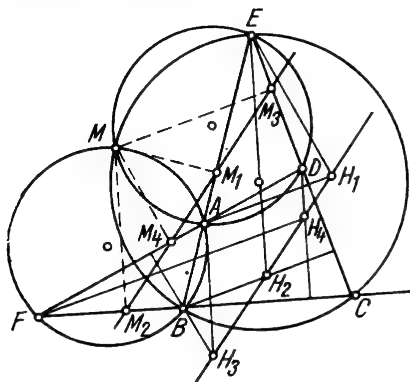


Fig. 92

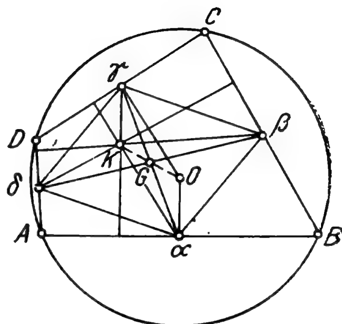


Fig. 93

de G. Figura $\alpha\beta\gamma\delta$ este paralelogram (probl. 59), deci $\overline{\alpha G} = \overline{G\gamma}$. Patrulaterul $\alpha O\gamma K$ este paralelogram, deci $\alpha K \parallel O\gamma \perp CD$ și $\gamma K \parallel O\alpha \perp AB$. Analog se arată că și celelalte perpendiculare trec prin anticentrul K. Se poate arăta ușor că punctul K este ortocentrul lui $\lambda\mu\nu$. **290.** Păstrînd notațiile din problema precedentă, fie H_a, H_b, H_c, H_d ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB, ABC. Avem $\overline{AH_b} = \overline{BH_a} = \overline{2O\gamma}$ (probl. 233). Dar $\overline{AH_b} \parallel \overline{BH_a}$, deci ABH_aH_b este paralelogram. $\overline{AH_a}$, $\overline{BH_b}$ se intersectează în părți egale într-un punct K. Analog se arată că $\overline{CH_c}$, $\overline{DH_d}$ au de asemenea mijlocul în K și apoi se arată identitatea între acest punct și punctul K din problema precedentă. **291.** Fie B_1 și C_1 intersecțiile dreptelor BH, CH cu cercul ABC (fig. 94). B_1N intersectează pe AO în P_1. Avem $\sphericalangle NHB_1 = \sphericalangle HNO = \sphericalangle HB_1P_1 = \sphericalangle P_1AB$. Deci P_1 se găsește pe cercul ABB_1, adică se confundă

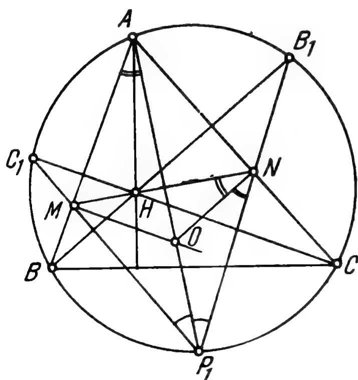


Fig. 94

cu P. La fel se arată că C_1M trece prin P. O este centrul cercului înscris în triunghiul MNP (G.M. XVI). **292.** Fie D, E, F (fig. 95) punctele în care paralelele din I la dreptele MA_1 MB_1, MC_1, întîlnesc respectiv laturile BC, CA, AB și P punctul unde bisectoarea AI intersectează cercul AEF. P se află pe mediatoarea segmentului $\overline{EF}$ și avem $\sphericalangle EIF = \sphericalangle B_1MC_1 = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle A$, iar $\sphericalangle EPF = 180° - \sphericalangle A$. Deci P este centrul cercului circumscris triunghiului EIF. În cercul AEF avem $\sphericalangle AFE = \sphericalangle APE$, iar în cercul IEF avem $\sphericalangle APE = 2\sphericalangle AIE$. Deci $\sphericalangle AFE = 2\sphericalangle AIE$ și analog $\sphericalangle BFD = 2\sphericalangle BID$. Dar $\sphericalangle DIE = 90° + \frac{1}{2}\sphericalangle C = \sphericalangle AIB$.

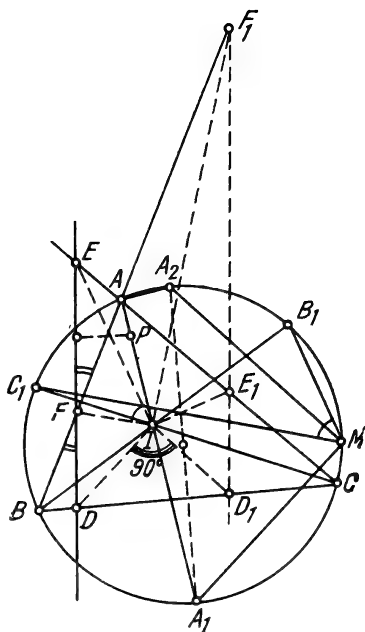


Fig. 95

Rezultă că $\sphericalangle AIE = \sphericalangle BID$ și deci $\sphericalangle AFE = \sphericalangle BFD$. Fie A_2, B_2, C_2 punctele în care bisectoarele exterioare triunghiului ABC intersectează cercul circumscris, iar D_1, E_1, F_1, punctele în care paralelele duse prin I la MA_2, MB_2, MC_2 intersectează respectiv laturile BC, CA, AB. Analog ca mai sus se arată că punctele D_1, E_1, F_1 sînt coliniare, iar centrul cercului circumscris triunghiului IE_1F_1 este punctul P_1, unde bisectoarea AI intersectează cercul AE_1F_1 (G. M. XXXII). **293.** Avem $\sphericalangle AF_1E_1 = \sphericalangle AP_1E_1 = 180° - 2\sphericalangle P_1IE_1 = 2\sphericalangle AIE_1 - 180°$. Dar unghiul EIE_1 este drept, deci $\sphericalangle AF_1E_1 = 2\sphericalangle AIE$. S-a arătat însă (probl. 292) că $\sphericalangle AFE = 2\sphericalangle AIE$, deci $\sphericalangle AFE = \sphericalangle AF_1E_1$. **294.** Fie unghiul drept în A (fig. 96), iar O, G, D puncte ale arcelor BC, CA, AB astfel alese ca MN, HL, EF fiind tangentele în aceste puncte să avem $\overline{OM} = \overline{ON}$, $\overline{GH} = \overline{GL}$, $\overline{DE} = \overline{DF}$. În triunghiul dreptunghic AEF, AD este mediană. Deci $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{DF}$ și $\sphericalangle DAF = \sphericalangle DFA$. Dar 2 măs. $\sphericalangle DAF =$ măs. arc DB, iar 2 măs. $\sphericalangle DFA =$ măs. (arc AD — arc DB) și arc $AD = \frac{2}{3}$ arc ADB. Analog

arătăm că arc $AG = \frac{2}{3}$ arc AGC. Deci arc $AD +$ arc $AG =$ $=$ arc $DAG = \frac{2}{3}$ arc $BAC = 120°$. De asemenea triunghiul dreptunghic MAN dă $\sphericalangle MAO = \sphericalangle AMO$. Deci 2 arc $BO =$ arc ACO și

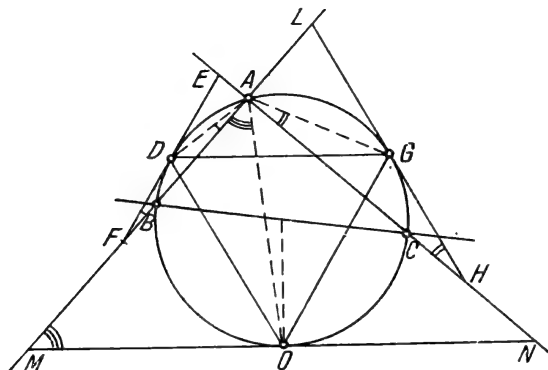


Fig. 96

cum 2 arc $BD =$ arc AD, arc $OBD =$ arc $BO +$ arc $BD = 120°$.
295. Fie M punctul a cărui dreaptă Simson (T') este paralelă cu secanta dată (T) (fig. 97) a cărei construcție se cunoaște (probl. 276). Dacă m_a, m_b, m_c sînt simetricele punctului M în raport cu laturile lui ABC, ele se găsesc pe dreapta (T), căci (T') trece prin mijlocul lui $\overline{MH}$. Dreapta m_aA_a trecînd prin H, simetrica sa în raport cu BC, care este dreapta MA_a, trece prin H_a. **296.** Fie d_a, d_b, d_c punctele de întîlnire ale diametrului (d) cu laturile lui $A_1B_1C_1$, O_a, O_b, O_c simetricele lui O în raport cu laturile acestui triunghi, $A'B'C'$ triunghiul ortic, H ortocentrul, O_9 centrul cercului Euler. O este ortocentrul lui $A_1B_1C_1$ și deci O_ad_a, O_bd_b, O_cd_c sînt concurente într-un punct ω al cercului (O_9) și simetricele a_1, b_1, c_1 ale lui ω în raport cu laturile lui $A_1B_1C_1$ se găsesc pe (d) (probl. 295). Punctele A' și O_a sînt diametral opuse în cercul (O_9). Deci $\omega A' \perp \omega O_a$ și simetricele acestor drepte în raport cu B_1C_1 vor fi de asemenea perpendiculare, adică a_1 va fi pro-

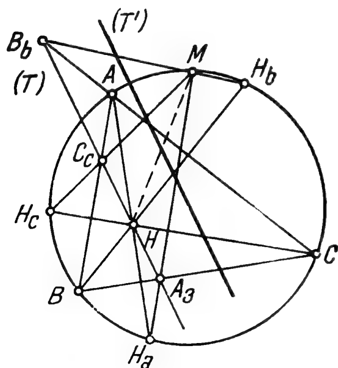


Fig. 97

iecția lui A pe (d). Proiecția lui a_1 pe BC trece prin ω (G.M. XXXIII). **297.** Fie (d) diametrul cercului circumscris (O) paralel cu (Δ) și celelalte notații ale problemei precedente. Punctele a, A, a_1 sînt coliniare. Simetricele α, A', ω ale acestor puncte în raport cu B_1C_1 sînt de asemenea coliniare și avem $\overline{\omega\alpha} = \overline{aa_1}$ distanța dintre (d) și (Δ). ω este centrul cercului $\alpha\beta\gamma$. **298.** Notațiile celor două probleme precedente, φ punctul în care perpendiculara $a\alpha$ pe BC intersectează a doua oară cercul $\alpha\beta\gamma$. Avem $\sphericalangle\ \omega\varphi\alpha = \sphericalangle\ \omega\alpha\varphi = \sphericalangle\ a_1a\alpha$, deci $\omega\varphi \parallel aa_1 \perp (\Delta)$ și φ este ortopolul dreptei (Δ) (G.M. XXXIII).

VII. **299.** (O') se obține din (O) printr-o translație egală și paralelă cu $\overline{MN}$. **300.** Generalizarea problemei precedente. Curbele (C) și (C') pot fi aduse să coincidă printr-o translație egală și paralelă cu $\overline{MN}$, deci sînt egale. **301.** Triunghiul $A'B'C'$ se obține din ABC printr-o translație. **302.** Cele două segmente formează un paralelogram; diagonalele AA', BB' se întîlnesc în O. Acesta este centrul în jurul căruia o rotație de 180° aduce pe A în A' și B în B' **303.** Segmentele pot fi paralele sau nu. În primul caz centrul de rotație se află la infinit și rotația devine o translație; în al doilea caz centrul de rotație se află în punctul de intersecție a dreptelor AB, $A'B'$ **304.** Centrul de rotație O se află în punctul de intersecție a mediatoarelor segmentelor $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$. Trebuie dovedit că $\sphericalangle\ AOA' = \sphericalangle\ BOB'$, ceea ce rezultă din egalitatea triunghiurilor OAB, $OA'B'$. Dacă $ABB'A'$ este convex, iar M, N sînt mijloacele lui AA', BB', se va observa că $\sphericalangle MOA + \sphericalangle\ AOB + \sphericalangle\ BON = \sphericalangle MOA' + \sphericalangle\ A'OB' + \sphericalangle B'ON$ și dacă O ar fi în interior, ar rezulta $AA' \parallel BB'$, dar atunci centrul de rotație este situat în afară, la intersecția dreptelor AB, $A'B'$. **305.** Fie E mijlocul arcului AC. Avem arc EA = arc EC și arc ED = arc EB. Punctele A, C și B, D sînt simetrice față de diametrul OE, deci dreptele AB, CD sînt și ele simetrice și se intersectează pe axa de simetrie OE. Altă soluție a se vedea la problema 96. **306.** Se vor lua două segmente simetrice și se va observa că centrul de simetrie este centrul de rotație; unghiul de rotație este de 180°. **307.** Fie P un punct al figurii date; M, M' simetricele sale în raport cu O și O'. Avem $\overline{MM'} \parallel \overline{OO'}$ și $\overline{MM'} = \overline{2OO'}$. **308.** Fie M, N două puncte ale figurii inițiale, M', N' simetricele lor în raport cu prima axă, M'', N'' simetricele lui M', N' în raport cu a doua axă. $\overline{MM''}$ și $\overline{NN''}$ sînt perpendiculare pe cele două axe, deci au direcție fixă, apoi $\overline{MM''} = \overline{NN''} = 2d$ (d fiind distanța dintre cele două axe). Deci $\overline{M''N''}$ se obține din $\overline{MN}$ printr-o translație. **309.** Fie M' simetricul lui M în raport cu prima

axă, M'' al lui M' în raport cu a doua axă. O fiind intersecția axelor, avem $\overline{OM} = \overline{OM''}$; $\sphericalangle MOM'' = 2\alpha$ (α unghiul celor două axe). **310.** Fie M' simetricul lui M în raport cu prima axă, M'' simetricul lui M' în raport cu a doua; N' simetricul lui M în raport cu a doua axă, N'' simetricul lui N' în raport cu prima. De la M la M'' se trece printr-o rotație de unghi 2α, iar de la M la N'' printr-o rotație de unghi $2(\pi-\alpha)$. Ca M'' și N'' să coincidă trebuie ca $2(\pi-\alpha) = 2\alpha$, adică $\alpha = \pi/2$, deci axele de simetrie perpendiculare. **311.** Se aduce $A'B'C'$ cu vîrful A' în A prin translația definită de $\overline{A'A}$ (fig. 98).

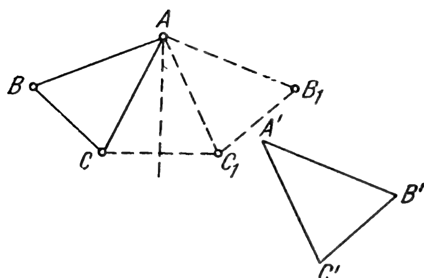


Fig. 98

Triunghiurile devin simetrice față de bisectoarea unghiului format de două laturi omoloage ce pleacă din A. Mai general fie P și P' două puncte omoloage ale celor două triunghiuri. Translația definită de $\overline{P'P}$ aduce pe P' în P și $A'B'C$ în

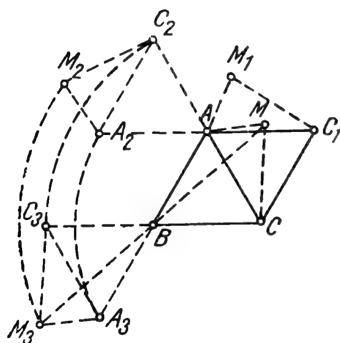


Fig. 99

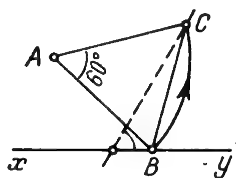


Fig. 100

$A_1B_1C_1$. Aceste două triunghiuri sînt simetrice față de o axă care trece prin P perpendiculară pe $\overline{AA_1}$. O infinitate de moduri. **312.** În cazul cînd proiecțiile punctului pe laturile triunghiului sînt coliniare, deci cînd M este situat pe cercul ABC (teorema lui Simson); atunci dreapta care unește simetricele lui M

trece prin ortocentrul triunghiului ABC. **313.** Fie M un punct al figurii considerate, M_1, M_2, M_3 pozițiile sale succesive (fig. 99). Se consideră că se rotește tot patrulaterul $MABC$ și se observă că după cele trei rotații punctul B revine la poziția inițială, deci B este centrul cerut. Deoarece rotația în jurul lui B este 180°,

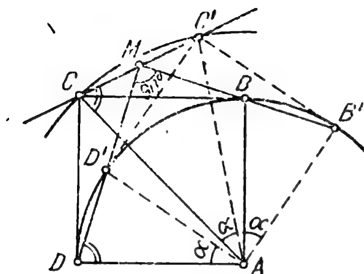


Fig. 101

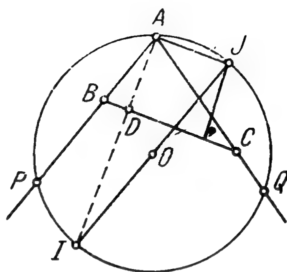


Fig. 102

figura finală este simetrică figurii inițiale în raport cu B. **314.** Oricare ar fi B pe xy (fig. 100), se poate trece de la B la C printr-o rotație de 60° în jurul lui A, deci locul lui C este transformata lui xy prin această rotație, adică o dreaptă. Același raționament cînd dreapta xy se înlocuiește cu un cerc. **315.** a) Triunghiurile egale ABB', ADD' (fig. 101) pot fi privite ca rezultînd unul din celălalt printr-o rotație de 90°, de unde rezultă că $BB' \perp DD'$. Deoarece B, D sînt fixe, locul este cercul circumscris lui $ABCD$. b) Din măsura unghiurilor avem $\sphericalangle\, MCA = \sphericalangle\, MDA$, iar din triunghiurile isoscele ACC' și ADD', avînd unghiurile din A egale, rezultă $\sphericalangle\, C'CA = \sphericalangle\, D'DA$, deci M se află pe CC'. **316.** În mișcarea sa, vîrful A descrie un arc de cerc (O) care trece prin P și Q (fig. 102). Înălțimea AD a triunghiului ABC întîlnește cercul (O) într-un punct fix I. Fie J punctul diametral opus lui I pe cercul (O). J este pe de o parte fix, pe de altă parte distanța lui la $\overline{BC}$ este egală cu $\overline{AD}$ care rămîne constantă în mișcarea triunghiului ABC; deci $\overline{BC}$ este tangentă la cercul de centru J și rază $\overline{AD}$. **317.** Simetrica lui Oy față de (D) întîlnește pe Ox în A. Punctul B se află ducînd perpendiculara din A pe (D). **318.** Problema se reduce la precedenta: trebuie construită baza $\overline{BC}$, cu B pe (D_1) și C pe (D_2), iar mijlocul lui $\overline{BC}$ pe

perpendiculara dusă din A pe (Δ) (fig. 103). **319.** Se translatează $\overline{FG}$ pînă cînd F vine în A. G va veni într-un punct cunoscut H. $\sphericalangle\, BGH = \sphericalangle\, AMB = \text{const}$, deci G este determinat. **320.** Presupunem punctul P exterior spațiului cuprins între (D_1) și (D_2) și de partea dreptei (D_1), iar O intersecția lui (D) cu (D_1) (fig. 104).

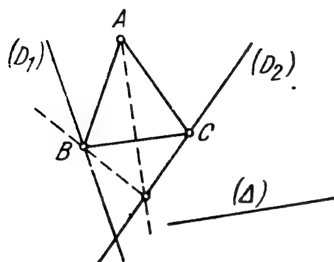


Fig. 103

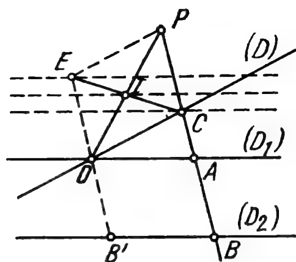


Fig. 104

Se translatează $\overline{PC}$ pînă cînd C vine în O și se translatează $\overline{AB}$ pînă cînd A vine în O. P vine într-un punct E, locul lui E este simetrica dreptei (D_2) în raport cu (D_1). Fie I centrul paralelogramului $PEOC$; locul lui I este o dreaptă paralelă cu (D_1) și locul lui C este simetrica locului lui E, în raport cu această dreaptă. *Altfel.* C' un punct pe (D) și P' simetricul lui P față

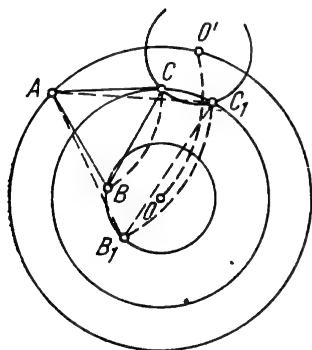


Fig. 105

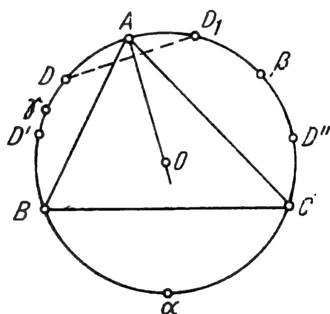


Fig. 106

de C'. Locul lui P', cînd C' descrie dreapta (D) este o paralelă (Δ) la (D). Dreptele (D), (Δ) și (D_1), (D_2) formează un paralelogram cu un vîrf în O. Diagonala care trece prin vîrful O al acestui paralelogram dă direcția secantei căutate. **321.** a) Rotim dreapta

(D') cu 60° în jurul lui A în sensul ales; intersecția transformatei cu dreapta (D) dă un vîrf al triunghiului, deci mărimea laturii. Sînt două soluții. b) Același raționament. În ambele cazuri presupunem problema rezolvată pentru a urmări raționamentul. **322.** Dacă se fixează vîrful A pe una din paralele, problema se reduce la precedenta. Există o infinitate (dublă) de soluții care se deduc unele din altele prin translații paralele cu dreptele date. În cazul cercurilor concentrice se fixează A, de exemplu pe cercul exterior (fig. 105), apoi se rotește de 60°, în jurul lui A, cercul cel mai mic; centrul lui ajunge pe cercul mare. În această nouă poziție el intersectează cercul mijlociu în C și C_1, care rotite invers de 60° ne dau pe B și B_1. Două soluții, una sau nici una pentru fiecare punct A. **323.** Punctul A, după o rotație în jurul lui γ, α și β revine la poziția inițială (fig. 106), pe cînd un punct D oarecare al cercului vine într-un punct D_1, simetric cu D în raport cu diametrul ce trece prin A. *Altfel.* Notăm $\alpha B = \alpha C = x$, $\beta C = \beta A = y$; $\gamma A + \gamma B = z$, de unde: $y + z = \widehat{\beta\gamma}$; $z + x = \widehat{\gamma\alpha}$; $x + y = \widehat{\alpha\beta}$ și $x + y + z = 180°$. Rezultă $x = 180° - \widehat{\beta\gamma}$. Construcția: γ' este diametral opus lui γ și paralela din β la $\gamma'\alpha$ taie din nou cercul în B etc. **324.** Fie O centrul cercului ce trece prin M și N. Se rotește figura în jurul lui O pînă ce M vine în N. Unghiul de rotație MON este cunoscut. A vine într-un punct cunoscut A_1. Se observă că unghiul format de dreapta PM, cu poziția ei rotită A_1N, este egal cu unghiul de rotație, de unde rezultă $\sphericalangle BNA_1 = \sphericalangle MON \pm \sphericalangle MPN$, după diferitele cazuri de figură; deci N este determinat. **325.** O și A sînt simetrice în raport cu bisectoarea unghiului OPA. P este deci la intersecția bisectoarelor unghiului format de (D') cu perpendiculara în O pe dreapta (D). **326.** Se ia pe (D), $\overline{OB} = R$, așa ca triunghiul PBC să fie isoscel. P este la intersecția lui (D) cu mediatoarea lui $\overline{BC}$. Două soluții. **327.** A_1 este simetricul lui A în raport cu PQ (fig. 107). A_1I este bisectoarea $\sphericalangle BIQ$. Cercul cu centrul A_1 și raza $\overline{A_1B}$ intersectează pe PQ în C. Perpendiculara din A_1 pe $\overline{BC}$ intersectează pe PQ în I. **832.** Fie E simetricul lui C în raport cu D și F simetricul lui C în raport cu $\overline{DP}$. F se găsește la intersecția lui $\overline{AB}$ cu arcul descris pe CE ca diametru.

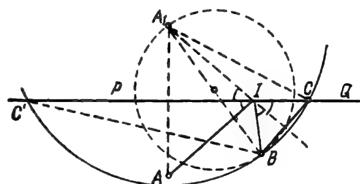


Fig. 107

P este la intersecția lui $\overline{AB}$ cu mediatoarea lui $\overline{CF}$. *Altfel.* PD trebuie să fie bisectoare. Fie D' conjugatul lui D față de A, C. Cercul de diametru DD' taie pe AB în P, P'. Două soluții, una sau nici una. Se va considera și D la mijlocul lui AC. **329.** Construim figura simetrică cu cea din enunț, în raport cu latura $\overline{AB}$.

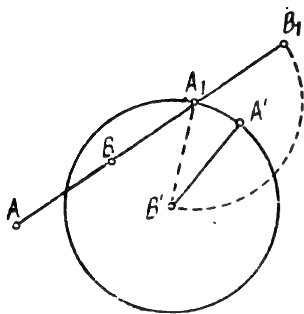


Fig. 108

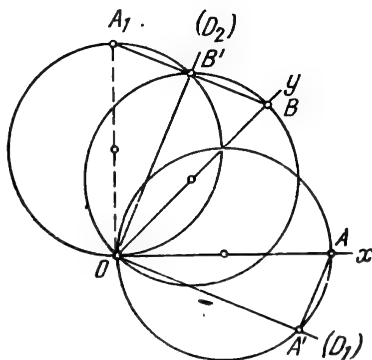


Fig. 109

Fie C', D', I' simetricele punctelor C, D și I în raport cu $\overline{AB}$. Figura $CDD'C'$ este un trapez isoscel și diagonalele sale trec prin E (G.M. XXIX). **330.** Se dă cercului (C') o translație paralelă cu (Δ) pînă vine în (C'') astfel ca linia centrelor să fie perpendiculară pe (Δ). Dacă (C) și (C'') sînt secante, atunci secanta comună este cea căutată (G.M. XXVIII). **331.** Fie l lungimea segmentului $\overline{AB}$ (fig. 108). Cu l ca rază și din B' (sau A') ca centru, descriem un cerc care intersectează direcția $\overline{AB}$ în A_1 și A_2. Dăm o mișcare de translație lui $\overline{AB}$ pînă ce A vine în A_1 (sau A_2) și B în B_1 (sau B_2). Rotim segmentul în jurul lui A_1 pînă ce B_1 coincide cu B'. Rotim din nou în jurul lui B' pînă ce A_1 vine în A'. **332.** Presupunem problema rezolvată; fie A', B' proiecțiile lui A și B respectiv pe (D_1) și (D_2) (fig. 109). Luăm $\overline{B'A_1} = \overline{AA'}$. Triunghiurile dreptunghice $OA'A$, $OB'A_1$ sînt egale și se obțin unul din altul printr-o rotație de 90°. A' este situat pe cercul de diametru $\overline{OA}$; B' pe cercul de diametru $\overline{OB}$, deci B' se obține rotind de 90° cercul de diametru $\overline{OA}$. Dreptele OB' și perpendiculara pe ea, OA', sînt cele căutate. **333.** Fie P_1 simetricul lui P în raport cu XY, P_2 simetricul lui P_1 în raport cu XZ, P_n punctul ce se obține continuînd aceste construcții

(fig. 110). Dreapta P_nC determină, prin intersecție cu ultima latură, punctul unde bila va lovi această latură. Se urmează drumul invers, plecînd de la acest punct și se găsește punctul M. **334.** Se dă triunghiului BIC o rotație de 60° în jurul punctului C (fig. 111); punctul B vine în A, iar I în I', deci $\overline{AI'} = \overline{BI}$.

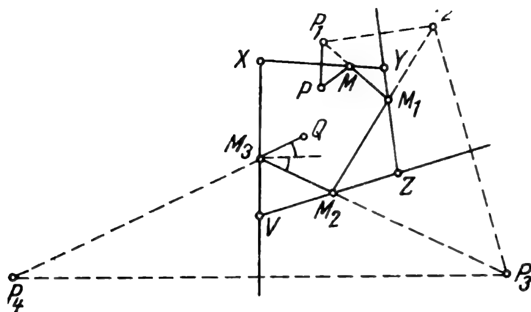


Fig. 110

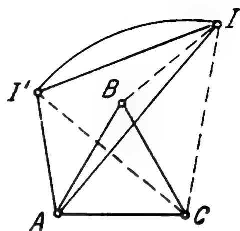


Fig. 111

Triunghiul ICI' este echilateral, deci $\overline{II'} = \overline{IC}$. Cu cele trei lungimi s-a construit astfel triunghiul IAI' (Bul. Șc. Politehnice, 1937).

VIII. **335.** Se duce diametrul perpendicular pe dreapta dată; extremitățile lui sînt punctele de contact al tangentelor căutate. **336.** Toate coardele de aceeași lungime cu cea dată rămîn tangente unui cerc concentric cu cel dat. Problema se reduce la a duce tangentele, paralele cu dreapta dată, la cercul concentric. *Altfel.* Fie O centrul cercului dat și O' proiecția lui pe dreapta dată. Se așază pe dreapta dată un segment egal cu coarda dată, cu mijlocul în O', apoi se duc paralelele la OO' prin extremitățile acestui segment. **337.** Fie A un punct pe una din paralele (fig. 112). Cercul cu centrul în A, de rază l, intersectează a doua paralelă în B și B'. Se duc tangentele la cerc paralele cu $\overline{AB}$, apoi cu $\overline{AB'}$; patru soluții, două sau nici una. **338.** Lungimea dată trebuie să fie mai mică decît diametrul lui (C'). Coardele lui (C') avînd lungimea dată sînt tangente la un cerc (C'') concentric cu (C'). Se vor duce tangentele comune la (C) și (C''). **339.** Se duce în (O') diametrul $\overline{AB}$ perpendicular pe $\overline{OO'}$.

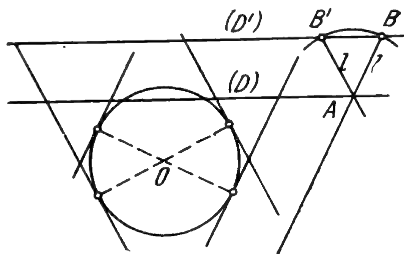


Fig. 112

Cercul cerut are centrul în O și raza $\overline{OA} = \overline{OB}$. **340.** Se ia pe $\overline{OA}$, $\overline{AB} = \overline{AB'} = R$. Cercurile de centre B, B' și raza R răspund la problemă. **341.** Centrul unui cerc căutat se va găsi la intersecția cercului de rază R, cu centrul în A, cu paralela la dreapta dată, la distanța R. Cel mult două soluții. **342.** Centrul

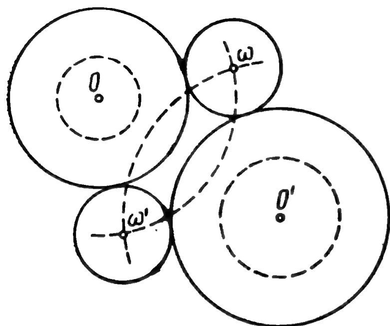


Fig. 113

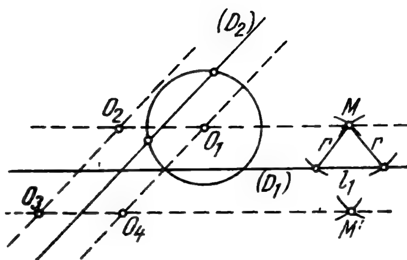


Fig. 114

unuia din cercurile cerute se găsește la intersecția cercurilor avînd centrul în O și ca raze suma și diferența razelor R, r, cu paralelele la (D), depărtate de ea cu R. Cel mult opt soluții. **343.** Fie R, R' razele cercurilor (O), (O') (fig. 113). Se descriu din O, ca centru, cercuri avînd ca raze suma și diferența lui R și r, apoi din O' altele avînd ca raze suma și diferența lui R', r. Orice punct comun al acestor cercuri este centrul unui cerc care răspunde la problemă. Cel mult opt soluții. **344.** Centrul unui cerc căutat este unul din punctele de intersecție ale paralelelor la Ox și Oy, la distanța R de ele. Patru soluții. Centrele găsite sînt pe bisectoarele unghiului xOy. **345.** Se ia pe (D_1) una din lungimi l_1 (fig. 114) și se construiesc triunghiurile isoscele simetrice care au baza l_1 și laturile egale R. Fie M și M' vîrfurile celor două triunghiuri. Se ia pe (D_2) cealaltă lungime l_2 și se construiesc triunghiuri isoscele cu l_2 ca bază și R laturile egale. Fie N, N' vîrfurile lor. Paralelele prin M, M' la (D_1) și paralelele prin N, N' la (D_2) determină prin intersecțiile lor centrele cercurilor căutate; patru soluții. **346.** Locul vîrfurilor unghiurilor drepte, ale căror laturi sînt tangente unui cerc

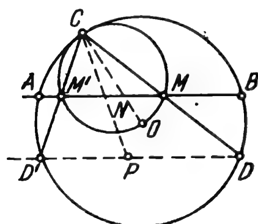


Fig. 115

dat este un cerc concentric (probl. 125). Punctele cerute se găsesc la intersecția a două cercuri. Cel mult două soluții. **347.** Centrul se află la intersecția perpendicularei duse în B pe dreapta (D) cu mediatoarea lui $\overline{AB}$. **348.** Centrul se găsește la intersecția dreptei OB cu mediatoarea lui $\overline{AB}$. **349.** Fie M mijlocul lui $\overline{CD}$, $\sphericalangle OMC = 90°$ (fig. 115). M se găsește la intersecția lui $\overline{AB}$ cu cercul descris pe $\overline{OC}$ ca diametru. Cel mult două soluții. *Altfel.* Locul simetricelor lui C față de punctele dreptei AB este o paralelă la AB, care intersectează cercul în cel mult două puncte D, D'. **350.** Se descriu cercuri: din A ca centru, cu BC ca rază, din C ca centru, cu $\overline{AB}$ ca rază. **351.** Fie r raza cercului dat (fig. 116) T punctul de tangență cu cercul, ω centrul cercului cerut. Triunghiul ωTA este isoscel, deci dacă se ia $\overline{AB} = r$, perpendicular pe (D), triunghiul ωOB este de asemenea isoscel. De aici construcția: se ia pe perpendiculara în A la (D), $\overline{AB} = \overline{AB'} = r$. Prin mijloacele lui $\overline{OB}$, $\overline{OB'}$ se ridică perpendiculare care intersectează pe $\overline{AB}$ în ω, ω'. Două soluții. *Altfel.* AT intersectează cercul în C și $OC \parallel \omega A$. Deci perpendiculara din O pe (D) intersec-

Fig. 116

Fig. 117

tează cercul în C, C'. AC și AC' determină pe cerc punctele de contact, T, T'. **352.** Tangenta în A la (O) intersectează pe (D) în T. Centrele cercurilor cerute se află la intersecțiile lui OA cu bisectoarele unghiurilor formate de TA cu DT. **353.** Se ia pe (D), $\overline{AB} = \overline{AB'} =$ raza lui (O). Prin mijloacele segmentelor $\overline{CB}$ și $\overline{CB'}$

se ridică perpendiculare care intersectează dreapta (D) în O, O'; acestea sînt centrele cercurilor cerute. **354.** Perpendiculara în A pe (D') intersectează dreapta (D) în B. Bisectoarele unghiului format de (D) cu AB întîlnesc pe (D') în centrele căutate. **355.** Pe tangenta în B se ia $\overline{BC}$ egal cu lungimea dată, apoi pe $\overline{OB}$, se ia $\overline{OM} = \overline{OC}$. M este punctul căutat. **356.** Se duce cercul cu centrul în B, tangent la dreapta (Δ) (fig. 117), apoi tangentele din A la acest cerc. Ele intersectează pe (Δ) în C și C'. Două soluții. Dacă A și B sînt de o parte și de alta a lui (Δ), construcția este asemănătoare cu cea precedentă. **357.** Se construiește cercul înscris (I). Centrul acestuia este punctul comun bisectoarelor. Punctele D, E, F de contact cu laturile sînt punctele de tangență ale cercurilor căutate, între ele. **358.** Se costruiește un triunghi echilateral ABC înscris în (O). Unul din cercuri va avea centrul pe OA, va trece prin A și va fi tangent mediatoarelor laturilor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ (probl. 354). **359.** Fie $\overline{AA'}$ înălțimea din unghiul drept, I centrul înscris, D, E, F punctele de tangență cu laturile. $IEAF$ este pătrat. Paralela prin I la ipotenuză intersectează pe $\overline{AA'}$ în M. În triunghiul AMI cunoaștem ipotenuza $\overline{AI}$ și cateta $\overline{AM}$, deci se poate construi. Se construiește apoi pătratul în care $\overline{AI}$ este diagonală; laturile care pleacă din A sînt pe laturile triunghiului. **360.** Se duc bisectoarele exterioare ale triunghiului $A'B'C'$. **361.** Se prelungește $\overline{BA}$ cu $\overline{AD} = \overline{AC}$ (fig. 118). În triunghiul BDC avem

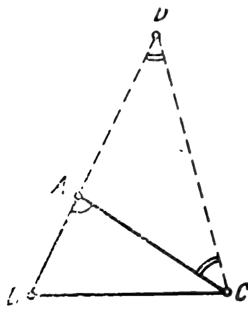


Fig. 118

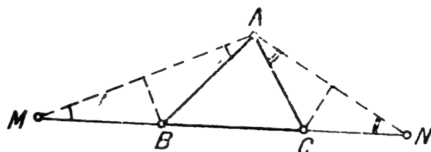


Fig. 119

$\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AC}$, $\sphericalangle\, BDC = \frac{1}{2} \sphericalangle\, A$. Din construcția lui BDC se deduce construcția lui ABC. **362.** Aceeași metodă ca în problema precedentă. **363.** Construim triunghiul AMN avînd $\overline{MN}$ egal cu perimetrul dat, $\sphericalangle\, M = \frac{\sphericalangle B}{2}$, $\sphericalangle N = \frac{\sphericalangle C}{2}$ (fig. 119). Me-

diatoarele lui $\overline{AM}$ și $\overline{AN}$ intersectează pe $\overline{MN}$ în B și C. ABC este triunghiul căutat. **364.** Pe o paralelă la (D) dusă prin A, se ia $\overline{AC} = \overline{AC'} = \overline{MN}$. Dreapta BC intersectează pe (D) în N, iar paralela din A la $\overline{BC}$ în M. $\overline{MN}$ este poziția căutată. Analog pentru C'. **365.** $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BAD$ (fig. 120) deci E este inter-

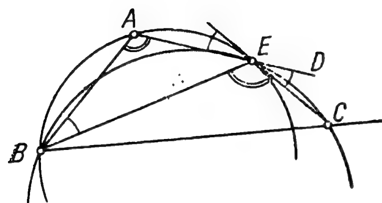


Fig. 120

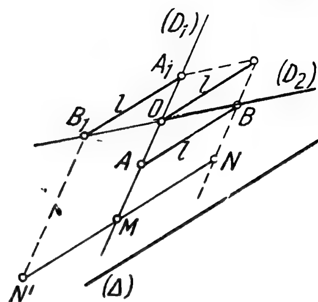


Fig. 121

secția cu AD a arcului capabil de $\sphericalangle BAD$ descris pe $\overline{BC}$. **366.** Se ia un punct M pe una din drepte (D_1), (fig. 121); prin M se duce o paralelă la (Δ), pe care se ia $\overline{MN} = \overline{MN'} = l$. Se aplică segmentelor $\overline{MN}$, $\overline{MN'}$ cîte o translație pînă ce N și N' vin pe (D_2). Se obțin două soluții $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$ simetrice față de punctul comun lui (D_1) cu (D_2). **367.** Distanța centrelor $\overline{CC'}$ este suma (diferența) celor două raze (fig. 122) iar $\overline{CC'} \perp (\Delta)$, deci de direcția

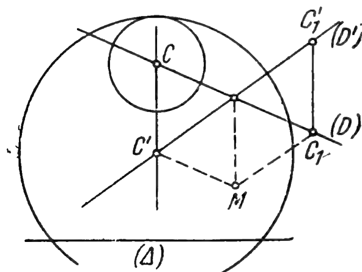


Fig. 122

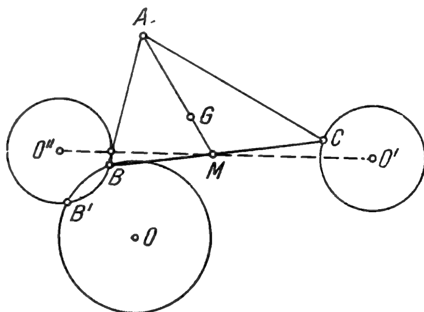


Fig. 123

cunoscută. Problema se reduce la precedenta (R.M.F. IV). **368.** Se prelungește $\overline{AG}$ cu $\overline{GM} = \frac{1}{2}\overline{AG}$ (fig. 123). Se ia simetricul O'' al lui O în raport cu M și fie B unul din punctele comune cercurilor (O) și (O''). BM intersectează pe (O') în C așa că $\overline{BM} = \overline{MC} \cdot ABC$

este triunghiul cerut. Cel mult două soluții (G.M. IV). **369.** Pe $\overline{OG}$ se ia $\overline{GO'} = \frac{1}{2}\,\overline{OG}$. Locul lui M este cercul de centru O' și rază $\frac{1}{2}\overline{OA}$ așa că M este determinat. Problema se reduce la cea precedentă (G.M. VII). **370.** Fie B intersecția paralelei duse din A la NT, cu MT. Se observă că triunghiurile MNT, MAB, TAB, OAB sînt isoscele. Punctul B este la intersecția cercului de centru O și rază $\overline{OA}$ cu cercul de centru A și rază $\overline{AT}$. M este la intersecția lui BT cu cercul (G.M. XIV). **371.** Fie α unghiul diagonalelor, $2l$ lungimea laturii date (fig. 124). Se aplică lui (O') două

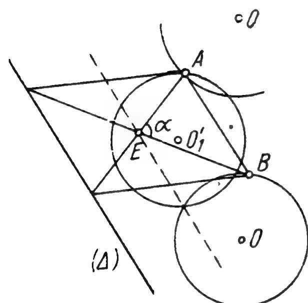


Fig. 124

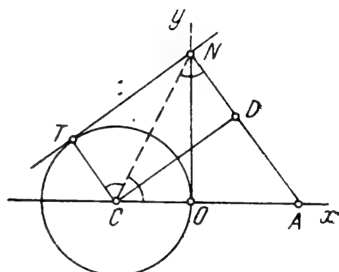


Fig. 125

translații paralele cu (Δ) și egale cu $2l$ și se obțin două cercuri (O_1'), (O_2') care intersectează pe (O) în patru puncte. Fie A unul din ele. Se va găsi pe (O') un punct B așa că $\overline{AB} = 2l$ și paralel cu (Δ). Punctul E comun diagonalelor este pe o paralelă la (Δ) și $\overline{AB}$, egal depărtat de ele și pe un arc de cerc, capabil de α, descris pe $\overline{AB}$. Cel mult opt soluții (G.M.V). **372.** Fie T punctul de tangență astfel ca $NT \perp NA$ (fig. 125). Avem $CT \parallel AN$, deci $\sphericalangle ANC = \sphericalangle NCT$, dar $\sphericalangle NCT = \sphericalangle NCA$ și triunghiul ANC este isoscel. *Altfel.* Ducem $CD \perp AN$; triunghiurile ANO și CAD sînt egale avînd unghiul A comun, $\overline{CD} = \overline{TN} = \overline{NO}$. De aici rezultă construcția lui N (Concursul de mat. 1953 R.M.F.). **373.** Se duce diametrul MOM' perpendicular pe direcția dată (fig. 126). Se unește M cu O', MO' intersectează pe (O) în A. Din A se duc cele două tangente la (O'), care intersectează pe (O) în B, C. Triunghiul ABC răspunde la problemă. Cel mult două soluții. **374.** Construim cercul concentric cu cel dat, la care trebuie să fie tangentă latura $\overline{AC}$, unghiul B fiind cunoscut. Din N ducem tangenta NAC și unim pe C cu M. **375.** Măsura unghiului A este

egală cu semisuma (semidiferența) arcelor MN și BC (fig. 127) Unghiul A fiind cunoscut, putem determina cu cerc concentric cu cel dat, la care latura $\overline{BC}$ este tangentă. Construcția urmează de la sine. **376.** Presupunem problema rezolvată, ABC triunghiul cerut, A pe cercul interior, B și C pe cel exterior. AB întîlnește cercul exterior în D. Unghiul B fiind cunoscut, se va cunoaște

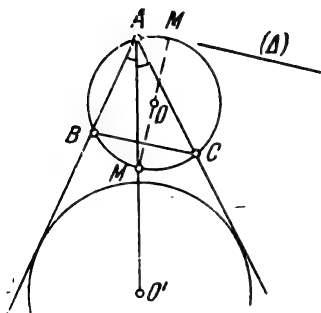


Fig. 126

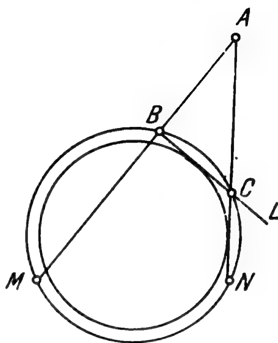


Fig. 127

lungimea coardei $\overline{CD}$. Pe $\overline{CD}$ se va descrie un segment capabil de suplimentul unghiului A. Intersecția acestuia cu cercul interior ne dă vîrful A. Două soluții. **377.** Se descriu pe laturile triunghiului ABC arce de cerc capabile de 60°. Vîrfurile triunghiurilor echilaterale circumscrise lui ABC se găsesc pe aceste cercuri. Problema se reduce la propoziția următoare: secanta de lungime maximă care trece prin punctul comun a două cercuri este paralelă cu linia centrelor. **378.** Fie P proiecția lui (O) pe (Δ) și M, N mijloacele segmentelor $\overline{OP}$, $\overline{OA}$. Se va observa că N se găsește pe cercul (O) și că $\overline{MN} \perp \overline{OP}$. Construcția: se găsește mijlocul lui $\overline{OP}$, apoi se duce $\overline{MN} \perp \overline{OP}$ care determină pe N. Restul urmează de la sine (G.M. XIII). **379.** Fie E intersecția lui $\overline{AB}$ cu $\overline{CD}$ și F intersecția lui $\overline{BC}$ cu $\overline{AD}$; $\alpha = \sphericalangle AED$; $\beta = \sphericalangle AFB$. Se va observa că $\sphericalangle BCD = 90° + \frac{\alpha + \beta}{2}$; $\sphericalangle ABC = 90° - \frac{\alpha - \beta}{2}$. Cunoscînd unghiurile patrulaterului, vom duce două cercuri concentrice cu cercul dat, așa ca tangentele duse la aceste cercuri să subîntindă în cercul dat unghiurile $90° + \frac{\alpha + \beta}{2}$ și $90° - \frac{\alpha - \beta}{2}$. Tangentele duse din punctul de intersecție al diagonalelor, la aceste cercuri, determină patrulaterul (G.M. XVIII). **380.** Fie $ABCD$

patrulaterul dat (fig. 128), E, F intersecțiile laturilor AB, CD și BC, AD. Dreptele ce unesc E și F cu mijloacele lui $\overline{AD}$ și $\overline{AB}$ se intersectează în O. Paralela dusă prin O la $\overline{AD}$ intersectează pe $\overline{CD}$ în H, iar paralela dusă prin O la $\overline{AB}$ intersectează pe $\overline{BC}$ în I, HI este transversala cerută (G.M. XIX).

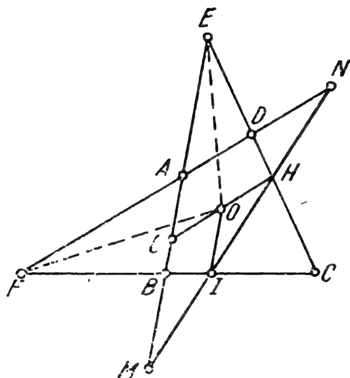


Fig. 128

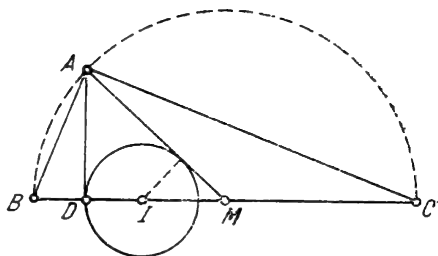


Fig. 129

381. Se construiește triunghiul BCD în care $\sphericalangle C = 90°$, $\overline{CD} = \overline{B'C}$. Se descrie din C ca centru, cu raza $\overline{CD}$ un arc de cerc care intersectează pe $\overline{BD}$ în B', se coboară din B o perpendiculară $\overline{BA}$ pe $\overline{B'C}$, ABC este triunghiul cerut. **382.** Presupunem problema rezolvată; notăm cu D, I, M (fig. 129) picioarele înălțimii, bisectoarei și medianei. Observăm că înălțimea și mediana sînt izogonale, deci cercul cu centrul I și raza $\overline{ID}$ este tangent la aceste drepte. Construcția: se duce perpendiculara în D pe DIM, iar din M tangenta la cercul cu centrul I și raza $\overline{ID}$, pînă intersectează perpendiculara în A. Cercul cu centrul M și raza $\overline{MA}$ determină pe B și C (Concurs de matematică R.M.F. 1940). **383.** $AB \parallel CD$; prin B se duce $BE \parallel AD$. Se construiește triunghiul BEC ale cărui laturi se cunosc și se deduce trapezul. **384.** Fie bazele $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$, diagonalele $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ (fig. 130). Se prelungește $\overline{AB}$ cu $\overline{BE} = \overline{DC}$. $BECD$ este paralelogram, deci $\overline{CE} = \overline{DB}$. Se construiește triunghiul AEC, apoi trapezul rezultă. **385.** Fie ABC triunghiul, $\overline{AM}$ mediana. Se prelungește $\overline{AM}$ cu încă o dată lun-

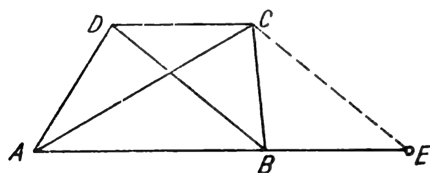


Fig. 130

gimea ei, pînă în A'. $ABA'C$ este paralelogram. Triunghiul ABA' se poate construi; rezultă triunghiul ABC. **386.** Fie $\overline{AD}$ înălţimea, $\overline{AM}$ mediana (fig. 131). Triunghiul ADM se poate construi. Cercul de rază dată R, cu centrul în A intersectează

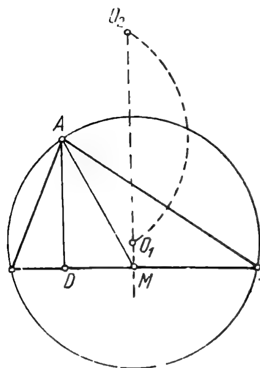


Fig. 131

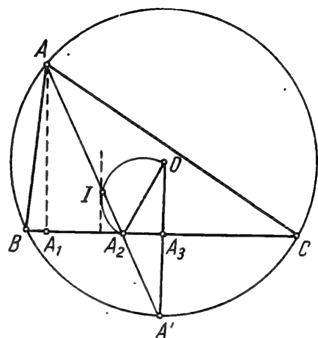


Fig. 132

perpendiculara în M pe MD în O_1 şi O_2, care sînt centrele cercurilor circumscrise, deci sînt posibile două soluţii. Condiţii: $R \geqslant \overline{DM}$; $R > \overline{O_1M}$, dacă $R > \overline{O_2M}$ sînt două soluţii. **387.** Fie ABC triunghiul căutat. Dacă se aplică o translaţie laturii $\overline{BC}$, aşa ca C să vină în A, B vine în D, $ACBD$ este un paralelogram. Se prelungeşte $\overline{BA}$ cu $\overline{AE} = \overline{AB}$; în triunghiul CDE laturile $\overline{CE}$, $\overline{DE}$ şi $\overline{CD}$ sînt îndoitul medianelor lui ABC, care pleacă respectiv din A, B, C. Din triunghiul CDE se deduce triunghiul ABC. **388.** D este punctul pe $\overline{AB}$ aşa ca $\overline{AD} = \overline{AC}$; I mijlocul lui $\overline{CD}$. Triunghiul $AA'I$ se poate construi, deoarece se cunosc laturile $\overline{AA'}$, $\overline{A'I} = \dfrac{\overline{AB} - \overline{AC}}{2}$ şi $\sphericalangle AIA' = 180° - \dfrac{\sphericalangle A}{2}$. Din triunghiul $AA'I$ se deduce triunghiul ABC (G.M. IX). **389.** Fie O centrul cercului ABC, I mijlocul coardei $\overline{BC}$ şi E mijlocul arcului BC; paralela dusă prin I la AE intersectează pe $\overline{AA'}$ în P. $\overline{BC} = \overline{AE} = \overline{PI}$ şi $CO \perp AE$. Construcţia: se ridică în A' o perpendiculară pe $\overline{BC}$ pe care se ia $\overline{IP} = \overline{BC}$. Perpendiculara din C pe $\overline{IP}$ întîlneşte perpendiculara în I pe $\overline{BC}$ în O (G.M. VIII). **390.** Se va observa că prelungind $\overline{BA}$ şi luînd $\overline{AD} = \overline{BA}$, $\sphericalangle DCA$ este cunoscut (G.M. XII). **391.** Fie A' mijlocul arcului BC şi I mijlocul lui $\overline{AA'}$ (fig. 132). I se găseşte la inter-

secția perpendicularei ridicată-pe mijlocul lui $\overline{A_1A_3}$ cu cercul descris pe $\overline{OA_2}$ ca diametru (G.M. XIX). **392.** Fie (O'') simetricul cercului (O') în raport cu xy. Punctele căutate sînt la intersecția cu xy a tangentelor comune cercurilor (O) și (O''). **393.** Fie M mijlocul lui $\overline{BC}$; cercul cu centrul ω și cu raza $\overline{\omega M}$ este cercul celor nouă puncte. El intersectează pe $\overline{BC}$ în N, piciorul înălțimii pe $\overline{BC}$. Cercul circumscris lui ABC trece prin B, C și are raza egală cu $\overline{2\omega M}$, deci se poate construi. Intersecția lui cu perpendiculara în N pe $\overline{BC}$ ne dă vîrful A. **394.** Fie D mijlocul laturii, L mijlocul lui $\overline{AH}$ (fig. 133). Avem două cazuri, după cum D este situat pe

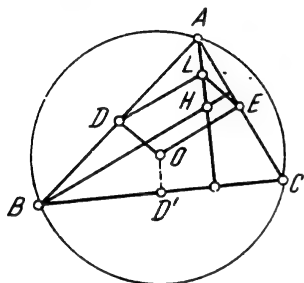


Fig. 133

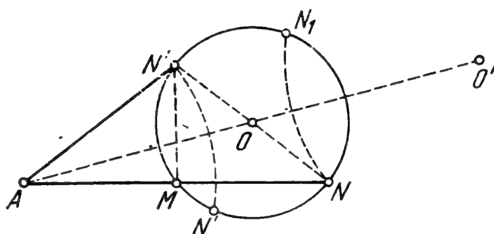


Fig. 134

$\overline{AB}$ $(\overline{AC})$ sau pe $\overline{BC}$. *Cazul I.* D este situat pe $\overline{AB}$. Avem $DL \parallel BH$ și $\overline{DL} = \frac{1}{2}\ \overline{BH} = \overline{OE}$. ($E$ mijlocul lui $\overline{AC}$.) $ODLE$ este paralelogram, deci E este determinat. Perpendicularele în D pe $\overline{OD}$ și în E pe $\overline{OE}$ ne dau punctul A, apoi cercul cu raza $\overline{OA}$ ne dă pe B, C. Cazul *II*. D' pe $\overline{BC}$. $OD'LA$ este paralelogram, deci se ia $\overline{LA} = \overline{OD'}$ pe paralela la OD' prin L și se determină A (R.M.T. VI). **395.** Se duce din A perpendiculara EAF pe cele două drepte paralele. Se demonstrează că triunghiurile ABE, AFD sînt egale, deci $\overline{EB} = \overline{AF}$, $\overline{FD} = \overline{AE}$; B, D sînt determinate. **396.** Se ia simetrica $\overline{AC'}$ a lui $\overline{AC}$ în raport cu $\overline{AD}$. $\sphericalangle\ BAC = \sphericalangle\ C - \sphericalangle\ B$, $\overline{BC'} = \overline{BD} - \overline{DC}$. Triunghiul ABC' se poate construi, căci cunoaștem $\overline{BC'}$, $\sphericalangle\ BAC'$ și $\overline{AD}$. Din triunghiul ABC' se deduce triunghiul ABC. **397.** Fie N' diametral opus lui N în (O) (fig. 134); avem $\overline{N'N} = \overline{N'A}$. Construcție: se descrie din A ca centru, cu diametrul lui (O) ca rază, un cerc care intersectează pe (O) în două puncte; fie N' unul din ele, N diametralul său în (O). AN este dreapta cerută. Cel mult două

soluții. *Altfel.* Cînd M descrie cercul (O), simetricul lui A față de M descrie un cerc cu centrul în O', astfel că $\overline{AO'} = 2\overline{AO}$. Construcție: din simetricul O' al lui A față de O se descrie un cerc cu raza cît diametrul lui (O) și se determină direct N. **398.** Secanta dusă prin A intersectează cercul interior în M, N și cel exterior în P. Avem evident $\overline{AM} = \overline{NP}$ și deoarece $\overline{AP} = 3\overline{MN}$ trebuie ca $\overline{AM} = \overline{MN}$. Problema se reduce la cea precedentă. **399.** Simetricul (O_1') al cercului (O_1) față de (D) intersectează pe (O_2) în B și B' (fig. 135). Simetricele lui B și B' sînt A și A' pe cercul (O_1). Soluțiile sînt $\overline{AB}$ și $\overline{A'B'}$. Dacă (O_1) și (O_2) nu se intersectează, nu sînt soluții; dacă sînt tangente, o soluție. **400.** Prelungim $\overline{AG}$ cu $\overline{GM} = \frac{1}{2}\overline{AG}$. Cercul descris din ω cu $\overline{\omega M}$ ca rază este cercul celor nouă puncte. Fie N mijlocul lui $\overline{AM}$, $\overline{B'C'}$ coarda din cercul precedent, perpendiculară în N pe $\overline{\omega N}$. B' și C' sînt mijloacele laturilor $\overline{AC}$ și AB. **401.** Fie O cen-

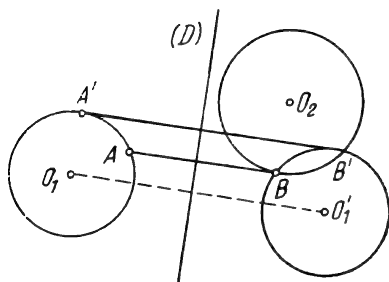


Fig. 135

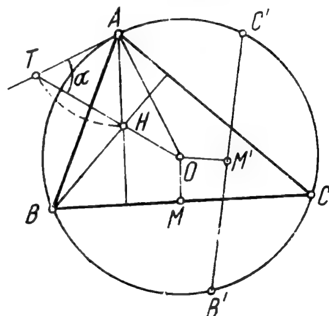


Fig. 136

trul cercului circumscris (fig. 136), H ortocentrul, ω centrul cercului lui Euler, M mijlocul laturii $\overline{BC}$, T intersecția tangentei în A la cercul (O) cu dreapta OH. Putem determina lungimea $\overline{OM}$ înscriind într-un cerc de rază R o coardă egală cu a și ducînd o perpendiculară din centrul cercului pe ea. D Se mai știe că $\overline{AH} = 2\overline{OM}$ (probl. 233). Construcție: descriem un cerc de rază R în care ducem o rază oarecare $\overline{OA}$. Pe această rază drept catetă construim triunghiul OAT dreptunghic în A și în care $\sphericalangle OTA = \alpha$. Din A ca centru, cu o rază egală cu $\overline{AH}$ descriem un cerc care intersectează pe OT în H și H_1. Pe paralela din O la $\overline{AH}$ luăm o

lungime $\overline{OM} = \frac{1}{2}\ \overline{AH}$. Perpendiculara din M pe $\overline{OM}$ întîlnește cercul în B și C. Două soluții (G.M. XXXI). **402.** Fie A unghiul cunoscut. Construim un cerc cu centrul într-un punct O și cu raza R. Luăm pe cercul (O) un arc BC, capabil de unghiul cunoscut A. Ortocentrul H se găsește pe cercul concentric de rază d cum și pe cercul de rază R care trece prin B, C (probl. 201). Perpendiculara din H pe BC întîlnește cercul O în vîrful A al triunghiului cerut. Putem avea două, una sau nici o soluție (G.M. XXIX). **403.** Picioarele B', C' ale înălțimilor din B și C sînt situate pe cercul de diametru $\overline{AH}$ și pe cercul lui Euler de diametru $\overline{MN}$ (fig. 137). Patrulaterul $BCB'C'$ este inscriptibil, centrul cercului fiind M; rezultă $\sphericalangle\ AC'B' = \sphericalangle\ C$. Construcție: cercul cu centrul N și raza $\overline{AH}/2$ intersectează cercul de diametru $\overline{MN}$ în B', C'. Se ia $\sphericalangle\ B'C'A = \sphericalangle\ C$; latura unghiului intersectează cercul (N) în A,

Fig. 137

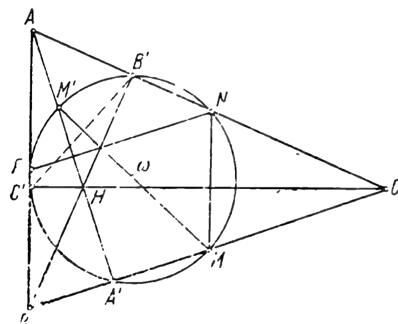


Fig. 138

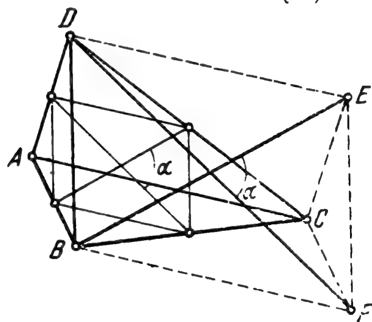


Fig. 139

iar cercul cu centrul M și raza $\overline{MB'}$, în B. Diametrul BMC determină punctul C. **404.** Fie M mijlocul laturii $\overline{BC}$, N al laturii $\overline{CA}$ (fig. 138). Sînt două cazuri, după cum se dă piciorul C' al înălțimii din C, sau unul din celelalte două. a) Fie date M, N, C'. Prin C' se duce o paralelă la MN, care este tăiată de cercul lui Euler (MNC') în P, mijlocul lui $\overline{AB}$. Cunoscînd triunghiul median, se

poate construi triunghiul ABC. b) Fie date M, N, B'. Cercul lui Euler MNB' are centrul ω. Simetricul M' al lui M față de ω este mijlocul lui $\overline{AH}$, iar simetricul lui B' față de $M\omega$ este C'. Perpendicularele din B' pe $\overline{NB'}$ și din C' pe $\overline{MN}$ sînt înălțimile care determină pe H. $\overline{M'H}$ este a treia înălțime. Restul construcției este evident. **405.** Fie I mijlocul lui $\overline{BC}$, D punctul comun lui $\overline{AH}$ și (Δ), E mijlocul lui $\overline{AH}$. (Δ) trece prin I și prin F, mijlocul lui $\overline{NH}$ (probl. 263). Din triunghiurile egale DFH, MIF avem $\overline{IM} = \overline{HD}$, apoi O fiind centrul cercului circumscris, $\overline{OI} = \overline{AE} = \overline{EH}$ (probl. 233), deci $\overline{IE} = \overline{OA} = \overline{OM} = \overline{ED}$. Construcție: din E ca centru cu $\overline{ED}$ ca rază se intersectează (Δ) în I, se duce $IO \parallel AH$, $AO \parallel IE$ și $BIC \perp AH$; din O ca centru, cu $\overline{OA}$ ca rază, se descrie un cerc care intersectează pe BIC în B, C. Construcția este posibilă dacă $\overline{OI} < \overline{IM}$ sau $\overline{EH} < \overline{ED}$ sau $\overline{AH}$ și $\overline{AD}$ de aceeași parte a lui (Δ). **406.** Se ia pe latura $\overline{CD}$, $\overline{CN} = \overline{AM}$. $\overline{MN}$ este o diagonală a dreptunghiului căutat. Cercul de diametru $\overline{MN}$ dă celelalte vîrfuri ca intersecție cu $\overline{BC}$ și $\overline{AD}$. Două soluții. Dacă $AB > BC$, se duce diametrul $PQ \parallel AB$ și rezultă condiția $PQ = MN \geqslant AB$. **407.** Se va construi un paralelogram $BDEF$, avînd drept diagonale dublul segmentelor date (fig. 139), aceste diagonale făcînd între ele unghiul α. Apoi pe $\overline{BD}$ ca bază se construiește în interiorul paralelogramului un triunghi BCD, avînd laturile $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ date. Se dă o translație a laturii $\overline{FC}$ pînă ce F vine în B; C vine în A. $ABCD$ este patrulaterul cerut. **408.** Mijloacele E, F, G, H ale laturilor patrulaterului $ABCD$ sînt vîrfurile unui paralelogram care se poate construi și se află mijlocul H al laturii $\overline{AD}$ a cărei mărime și direcție o cunoaștem. **409.** Fie $ABCD$ patrulaterul căutat, E, F, G, H mijloacele laturilor, iar I și J mijloacele diagonalelor $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. Se cunosc laturile și segmentul $\overline{EG}$. Se construiește paralelogramul $EIGJ$ căruia i se cunosc laturile și diagonala $\overline{EG}$. Se construiește apoi paralelogramul $HIJF$ ale cărui laturi sînt de asemenea cunoscute. Patrulaterul se poate construi căci se cunosc mijloacele laturilor ca și mărimile și direcțiile lor. **410.** Se consideră problema rezolvată. Pe o diagonuală $\overline{BD}$ se descrie arcul BAD capabil de unghiul A și în partea opusă, arcul BCD capabil de unghiul C. Cercul BAD intersectează laturile $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ în E și F. Se duce tangenta MAN. Unghiurile MAE și NAF respectiv egale cu unghiurile ABE, ADF sînt cunoscute. Se cunosc deci și coardele $\overline{EF}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$. Construcție: cu ajutorul

diagonalei $\overline{BD}$ și unghiului A se construiește cercul BAD, cu centrul O. Într-un punct A' se duce tangenta $MA'N$ și apoi se determină coarda $\overline{EF}$ cu ajutorul unghiurilor cunoscute $MA'E$ și $NA'F$. Pe coarda $\overline{EF}$ se descrie arcul de cerc capabil de unghiul C. Din A' ca centru cu lungimea celei de a doua diagonale ca rază, se intersectează acest cerc în C'. Patrulaterul invariabil $A'EC'F$ se rotește în jurul lui O pînă cînd C' ajunge în C pe arcul de cerc BCD, iar A' într-o nouă poziție A. Patrulaterul căutat este $ABCD$. Cel mult două soluții. **411.** Fie $ABCD$ patrulaterul (fig. 140). Vîrful E este situat pe cercul de diametru $\overline{AB}$, iar vîrful G pe cercul de diametru $\overline{CD}$. Dreapta MN care unește mijloacele arcelor AB și CD interioare este o diagonală a pătratului. Ea intersectează primul cerc în E și al doilea în G. **412.** Se va presupune problema rezolvată. Fie A, B punctele date, C punctul de contact cu xy, A' simetricul lui A în raport cu xy și I punctul unde AB intersectează pe xy. Se va observa că $\sphericalangle BCA' = \sphericalangle BCA + 2\sphericalangle ACI = \sphericalangle BCI + \sphericalangle CBI =$ $= 180° - \sphericalangle CIB =$ unghi cunoscut. Așadar C se află la intersecția cu xy a celor două arce capabile de $180° - \sphericalangle BIC$ descrise pe $\overline{BA'}$. **413.** Fie M mijlocul lui $\overline{AC}$; se ridică în M coarda $BMD \perp$ $\perp OM$. **414.** Medianele $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ se intersectează în G (fig. 141); fie $\overline{AI} \parallel \overline{CC'}$ care intersectează pe BB' în I; $\overline{IA} = 2\overline{GC'} = \frac{2}{3}\overline{CC'}$,

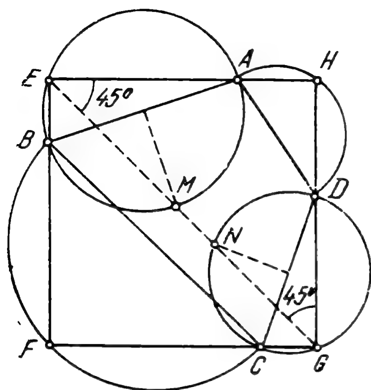


Fig. 140

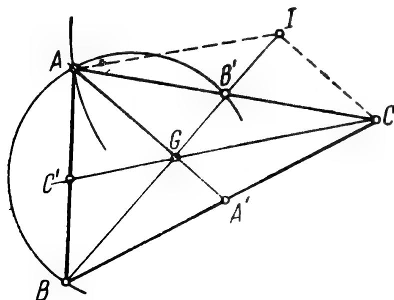


Fig. 141

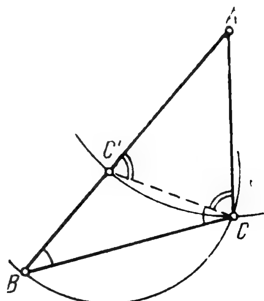


Fig. 142

$\overline{BG} = \overline{GI}$. Construcție: se ia mediana $\overline{BB'}$ pe care se construiește arcul de cerc capabil de unghiul A, se prelungește $\overline{BB'}$ cu $\overline{B'I} = \overline{BB'}/3$; din I ca centru, cu $\frac{2}{3}\,\overline{CC'}$ ca rază, se descrie un cerc care intersectează pe cel dintîi în A. Se deduce ușor triunghiul ABC. **415.** Pe mijlocul lui $\overline{AB}$ se ridică o perpendiculară, care intersectează în D cercul de centru A, cu raza $\overline{AC}$ și care este intersectat din nou în C de $\overline{BD}$. **416.** Se ia pe $\overline{AB}$, $\overline{AC'}$ $\overline{AC}$ (fig. 142), din C' ca centru, cu $\overline{C'B}$ ca rază, se descrie un cerc; din A ca centru, cu $\overline{AC}$ ca rază, se descrie un al doilea cerc, care intersectează pe cel dintîi în C. **417.** Fie $\overline{AI}$ înălțimea (fig. 143); în I se ridică perpendiculara xy pe $\overline{AI}$. Din A ca centru, cu bisectoarea ca rază, se intersectează xy în A'; tot din A cu mediana ca rază se intersectează xy în M, așa ca A' să fie situat între I și M. Simetrica lui $\overline{AI}$ în raport cu AA' intersectează perpendiculara pe xy în M, în punctul O, iar AA' o intersectează în N. Din O ca centru, cu $\overline{OA} = \overline{ON}$ ca rază, se intersectează xy în B și C. **418.** Fie F, G, H, K, L mijloacele laturilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ ale pentagonului cerut (fig. 144), I mijlocul diagonalei $\overline{AD}$. $FGHI$ formează un paralelogram care se poate construi. Apoi cu ajutorul mijloacelor I, L, K se poate construi triunghiul ADE. Se deduc ușor, apoi, punctele B și C. **419.** Să luăm un punct P și să construim simetricul P_1 al lui P în raport cu α_1, simetricul P_2 al lui P_1

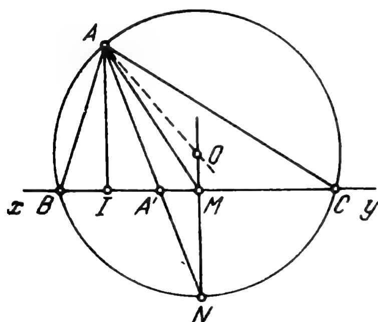


Fig. 143

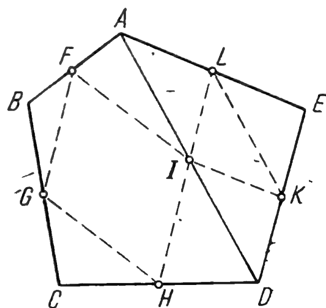


Fig. 144

în raport cu α_2 și să continuăm această construcție pînă la punctul P_n simetric în raport cu α_n. În mod analog plecînd de la un punct Q se ajunge la Q_n. Intersecția mediatoarelor segmentelor $\overline{PP_n}$,

$\overline{QQ_n}$ este un vîrf A. Prin simetrii succesive în raport cu mediatoarele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, se deduc celelalte vîrfuri $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$.

IX. **420.** Se va aplica fiecăruia din triunghiurile formate teorema paralelei la una din laturi. **421.** O dreaptă paralelă cu (D). **422.** AA', BB' se întîlnesc în O; $\overline{OC}$ intersectează pe $\overline{B'C'}$ în C''; $\overline{B'C''}:\overline{BC}=\overline{OB'}:\overline{OB}=\overline{A'B'}:\overline{AB}=\overline{B'C'}:\overline{BC}$, deci C' și C'' se confundă. **423.** Prin M se duce $MO' \parallel OP$, O' pe OA este fix, $\overline{O'}$ este constant (fig. 145). Locul este un cerc. **424.** Se vor aplica

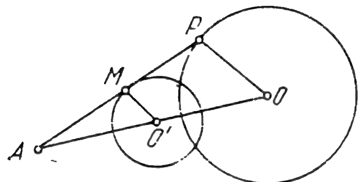


Fig. 145

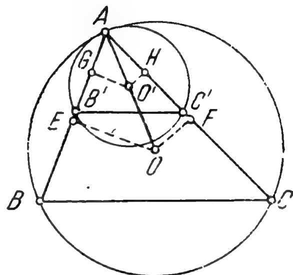


Fig. 146

cele constatate în problema precedentă. Fie M mijlocul lui $\overline{BC}$, O' pe $\overline{MO}$ așa ca $\overline{OO'}=2\overline{MO'}$. Locul este un cerc de centru O'. **425.** Fie E, F mijloacele lui $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, apoi G, H mijloacele lui $\overline{AB'}$, $\overline{AC'}$ (fig. 146). Centrul O al cercului ABC se află la intersecția mediatoarelor lui $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. Mediatoarea lui $\overline{AB'}$ intersectează pe $\overline{OA}$ în O', astfel ca $\overline{AO'}:\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{AB'}:\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AB'}:\overline{AB}$.

La fel mediatoarea lui $\overline{AC'}$ intersectează pe $\overline{OA}$ în O'' așa că $\overline{AO''}:\overline{AO}=\overline{AC'}:\overline{AC}$. Dar $\overline{AB'}:\overline{AB}=\overline{AC'}:\overline{AC}$, deci O' și O'' se confundă. **426.** Dacă $\overline{CA}:\overline{CB}=\overline{DA}:\overline{DB}=m:n$, atunci $\overline{OA}:\overline{OB}=$ $=m^2:n^2$. O este situat pe prelungirea lui $\overline{AB}$. **427.** Simetricul N' al lui N față de P descrie o paralelă (Δ) la cele două drepte date (fig. 147). Pe dreapta lui M se fixează vîrful compasului în O și cu cercul de rază l se intersectează (Δ) în două puncte A, A'. Se duc apoi prin P paralelele la OA și OA'. **428.** Se va demonstra că $\overline{BF}:\overline{BC}=\overline{BG}:\overline{BD}$ care rezultă din triunghiurile ABC și ABD, în care EF, EG sînt paralele la cîte una din laturi. **429.** Din proprietățile bisectoarei se deduce $\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{AF}:\overline{FC}$. **430.** În triunghiul ABC se duce mediana unui vîrf și paralelele la ea prin

celelalte două vîrfuri. Trei soluții. **431.** Din paralelismul dreptelor AC și MM', AB și NN'' (fig. 148), deducem $\overline{AM'}:\overline{AB} = \overline{MC}:\overline{BC}$, $\overline{AN''}:\overline{AC} = \overline{BN}:\overline{BC}$. Dar $\overline{MC}=\overline{BN}$, deci $\overline{AM'}:\overline{AB}=\overline{AN''}:\overline{AC}$ și dreapta $M'N''$ este paralelă cu $\overline{BC}$. Analog, arătăm că $N'M'' \parallel \overline{BC}$. Locul căutat este mediana laturii $\overline{BC}$ (G. M. XXIX). **432.** Se va observa că FE și GE sînt bisectoare în triunghiurile FCD și GCD, deci $\overline{FC}:\overline{FD}=\overline{GC}:\overline{GD}$. **433.** $\Delta A'MP \sim \Delta BMQ$, deci $\overline{MA}:\overline{MB} = \overline{AP}:\overline{BQ}$; $\Delta NAP \sim \Delta NBQ'$, deci $\overline{NA}:\overline{NB}=\overline{AP}:\overline{BQ'}$, de unde

Fig. 147

Fig. 148

$\overline{MA}:\overline{MB}=\overline{NA}:\overline{NB}$ (fig. 149). **434.** Paralela prin N la $\overline{AC}$ intersectează pe $\overline{BC}$ în D. $DM \parallel AB$ (teorema lui Thales). Fie E intersecția diagonalelor în paralelogramul $ANDM$. Locul lui E este o paralelă (Δ) la $\overline{BC}$ (probl. 421). Centrul de greutate G al triun-

Fig. 149

Fig. 150

ghiului PNM este pe PE astfel că $\overline{PG}:\overline{GE} = 2$. Locul lui G este o paralelă (Δ') la (Δ), deci la BC (R.M.T.III). **435.** $\overline{AC} = a$; $\overline{BD} = b$; din triunghiuri asemenea se deduce $\overline{OE} = ab:(a+b)$.

436. Din enunț avem $\overline{PM}:\overline{BC}=\overline{PN}:\overline{AD}$, dar $\overline{PM}:\overline{BC}=\overline{AP}:\overline{AC}$ și $\overline{PN}:\overline{AD}=\overline{CP}:\overline{AC}$. P este mijlocul lui $\overline{AC}$. **437.** În triunghiul CEF paralelele la laturi, $\overline{AB}$ și $\overline{AD}$, ne dau $a:\overline{CF}=\overline{EA}:\overline{EF}$; $a:\overline{EC}=\overline{AF}:\overline{EF}$. Adunînd, obținem relația din enunț. În celelalte cazuri: a) $1:\overline{CF}$ are semnul —; b) $1:\overline{CE}$ are semnul — (Concursul de matem. 1951 R. M. F.). **438.** Fie $ABCD$ unul din pătrate și M pe $\overline{BC}$. Dacă segmentele $\overline{AB}$ și $\overline{MB}$ sînt comensurabile, $\overline{BM}:\overline{AB}$ este rațional, $m:n$. În pătratul $AB_1C_1D_1$ în care $\overline{AB_1}=n\cdot\overline{AB}$, latura $\overline{B_1C_1}$ este intersectată în M_1, astfel că $\overline{B_1M_1}=n\cdot\overline{BM}=m\cdot\overline{AB}$, deci AM trece prin vîrful altui pătrat. Ca acest lucru să nu se întîmple trebuie ca $\overline{BM}:\overline{AB}$ să fie irațional, deci $\overline{BM}$ și $\overline{AB}$ incomensurabile. Raționament analog pentru triunghiurile echilaterale. **439.** I fiind punctul de intersecție al dreptelor BH și AC, avem $\overline{AG}:\overline{GH}=\overline{FD}:\overline{DH}=\overline{AC}:\overline{CI}$. **440.** Se unește A cu mijlocul A' al lui $\overline{BC}$, $\overline{AA'}$ intersectează pe $\overline{OH}$ în G' (fig. 150), $\Delta AHG'\sim\Delta OG'A'$ și deoarece $\overline{AH}=2\ \overline{OA'}$ (probl. 233), rezultă $\overline{A'G'}=\overline{AG'}/2$, adică G' este în G, apoi $\overline{HG}=2\ \overline{OG}$. **441.** $\overline{OH}:\overline{OG}=\overline{O'H}:\overline{O'G}=3$. **442.** Triunghiul $A_1B_1C_1$ este asemenea cu ABC. Izogonalele dreptelor AM, BM, CM se întîlnesc într-un punct M' (probl. 586). Perechile de drepte (AM', A_1A_2), (BM', B_1B_2), (CM', C_1C_2) sînt omoloage în cele două triunghiuri asemenea. Perechile de drepte (AM, A_1A_2), (BM, B_1B_2), (CM, C_1C_2) sînt omoloage în cele două triunghiuri asemenea. **443.** Cele trei triunghiuri din enunț sînt asemenea, deci $\overline{AB}:\overline{DC}=\overline{BC}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{CE}$; apoi $\sphericalangle BCD=\sphericalangle DEF$ (fig. 151). Dacă

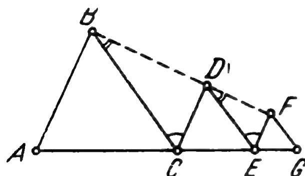


Fig. 151

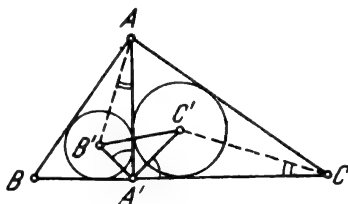


Fig. 152

B, D, F sînt coliniare, atunci $\sphericalangle CBD=\sphericalangle EDF$ și $\Delta BCD\sim\Delta DEF$, de unde $\overline{BC}:\overline{DE}=\overline{CD}:\overline{EF}$. Comparînd șirurile de rapoarte, rezultă $\overline{AB}:\overline{DC}=\overline{DC}:\overline{EF}$. **444.** Fie B', C' picioarele înălțimilor din B, C, iar N, P proiecțiile lui M pe $\overline{AC}$, $\overline{AB}$. Deoarece $BCB'C'$ este inscriptibil, rezultă că $\sphericalangle AC'B'=\sphericalangle C$ și $\Delta AB'C'\sim\Delta ABC$ (au

şi $\sphericalangle A$ comun), deci $\overline{AB'}:\overline{AB}=\overline{AC'}:\overline{AC}$. În baza teoremei lui Thales avem $\overline{NB'}:\overline{B'A}=\overline{MH}:\overline{HA}=\overline{PC'}:\overline{C'A}$. Primul şi ultimul raport de aici, înmulţite respectiv cu cele din egalitatea precedentă, dau $\overline{NB'}:\overline{AB}=\overline{PC'}:\overline{AC}$. **445.** Fie O centrul cercului ABC. Se ştie că $\overline{OA}\perp\overline{B'C'}$ (probl. 231). Avem $\sphericalangle baH=\sphericalangle HC'B'=\sphericalangle HAB'=$ $=\sphericalangle BAO$. Deci $ab\parallel AB$ (G.M. XII). **446.** Din asemănarea triunghiurilor $AB'A'$, $A'C'C$ (fig. 152), pe de o parte, şi a triunghiurilor $AA'C$, ABC, pe de altă parte, deducem $\overline{A'B'}:\overline{A'C'}=\overline{AA'}:\overline{A'C}=$ $=\overline{AB}:\overline{AC}$ (G.M. X). **447.** Patrulaterele $DA''BC''$, $DA''CB''$, $ABA'B'$, $ACA'C'$ (fig. 153) sînt inscriptibile. Deci $\sphericalangle DA''B''=$

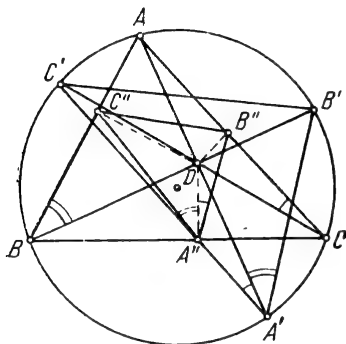


Fig. 153

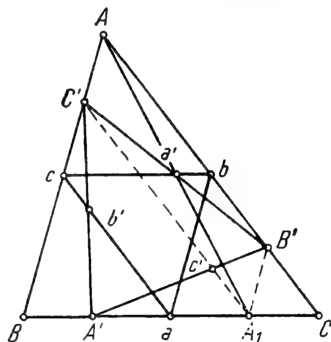


Fig. 154

$=\sphericalangle DCB''=\sphericalangle C'CA=\sphericalangle C'A'A$ şi $\sphericalangle DA''C''=\sphericalangle DBC''=\sphericalangle B'BA=$ $=\sphericalangle B'A'A$. Dar $\sphericalangle DA''C''+\sphericalangle DA''B''=\sphericalangle B''A''C''$, iar $\sphericalangle B'A'A+$ $+\sphericalangle C'A'A=\sphericalangle B'A'C'$. Deci $\sphericalangle B''A''C''=\sphericalangle B'C'A'$. **448.** Fie A_1, B_1, C_1 punctele ce împart în raportul k laturile triunghiului ABC dar în sens contrar punctelor A', B', C' (fig. 154). Se observă că $B'A_1\parallel AB$ şi $C'A_1\parallel AC$. Deci a' se află la mijlocul lui $\overline{AA_1}$; b, c, a' sînt în linie dreaptă. Pentru a arăta că triunghiurile ABC, $A'B'C'$ au acelaşi punct de întîlnire a medianelor, se notează cu G intersecţia dreptelor $A'a'$, Bb şi deoarece $\overline{BA'}=\overline{CA_1}=$ $=2\overline{a'b}$, vom avea şi $\overline{GA'}=2\overline{Ga'}$ şi $\overline{GB}=2\overline{Gb}$. **449.** Avem $\overline{A'A}=\alpha\cdot\overline{A'A_1}$; $\overline{A'A_1}=\overline{A_1A}:\beta$. Din $\overline{A'A_1}=\overline{A'A_1}+\overline{A_1A}$, $\overline{A'B}=\overline{A_1B}-\overline{A_1A'}$ se deduce $\overline{A_1A}:\overline{A_1B}=\alpha\beta:(\alpha+\beta+1)$ şi din relaţiile analoge deducem $\overline{A_1A}:\overline{A_1B}=\overline{B_1B}:\overline{B_1C}=\overline{C_1C}:\overline{C_1A}$. Se aplică apoi probema precedentă (G.M. XXVIII). **450.** Să presupunem punctele a, b, c oarecare şi fie G, G', G'', G''' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, aBC, abC, abc, iar A', B', C' mijloacele laturilor lui ABC. Punctele G, G' divid medianele $\overline{AA'}$, $\overline{aA'}$ în acelaşi raport

2 : 1. Deci $GG' \parallel Aa$ și $\overline{Aa} = 3\overline{GG'}$. Se deduce deci G''' din G construind linia frîntă $GG'G''G'''$, ale cărei laturi sînt paralele cu $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$ și egale cu a treia parte a lor. Punctele G și G''' vor coincide cînd $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$ vor fi egale și deci paralele cu laturile unui aceluiași triunghi. În cazul problemei, Ac, Ba, Cb îndeplinesc condiția cerută și triunghiurile ABC, abc au același centru de greutate. **451.** Fie M, N, P mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ (fig. 155); α_2, β_2, γ_2 punctele unde aceleași laturi sînt intersectate de AM_2, BM_2, CM_2, G fiind centrul de greutate. Fie G' punctul unde A_1A_2 intersectează mediana BN. Avem $\overline{A_2N} = \frac{1}{2}\overline{\alpha_2C} = \frac{1}{2}\overline{BA_1}$, deoarece prin enunț $\overline{BA_1} = \overline{\alpha_2C}$. Din triunghiurile asemenea A_2NG' și A_1BG' rezultă $\overline{G'N} = \frac{1}{2}\overline{G'B}$, deci G' se confundă cu G. La fel se arată că B_1B_2, C_1C_2 trec prin G. Apoi $\overline{GA_1} : \overline{GA_2} = \overline{GB_1} : \overline{GB_2} = 2$ deci $A_2B_2 \parallel A_1B_1$. Analog pentru celelalte laturi; triunghiurile sînt omotetice, cu centrul de omotetie G (G.M. LIV). **452.** Fie A, B punctele date, k raportul constant. Luăm între A și B un punct C, așa ca $\overline{CA} : \overline{CB} = k$, apoi pe prelungirea lui $\overline{BC}$ un punct O așa

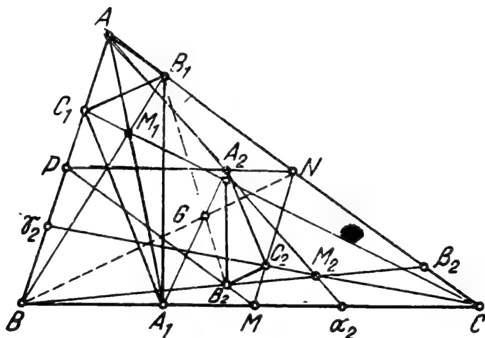


Fig. 155

ca $\overline{OC} : \overline{OB} = k$. Locul căutat este cercul descris din O ca centru cu $\overline{OC}$ ca rază. Fie P un punct pe acest cerc, Q punctul unde $\overline{OP}$ intersectează cercul descris din O cu raza $\overline{OB}$. Se va observa că $\overline{OC} : \overline{OB} = \overline{CA} : \overline{CB} = (\overline{OC} - \overline{CA}) : (\overline{OB} - \overline{CB}) = \overline{AO} : \overline{OC} = k$, deci $\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OC} : \overline{OB} = \overline{OP} : \overline{OQ}$; $\overline{PA} \parallel \overline{QC} \cdot \overline{PA} : \overline{PB} = \overline{PA} : \overline{QC} = k$. **453.** Metoda intersecției locurilor geometrice. Pe baza $\overline{BC}$ se de-

scrie arcul capabil de unghiul dat (fig. 156, *a*). Intersecția acestuia cu locul punctelor M așa ca $\overline{MB} : \overline{MC}$ = raportul dat, dă al treilea vîrf. *Altfel:* se construiește unghiul A și, pe laturi, $\overline{AB_1}$, $\overline{AC_1}$ în raportul dat (fig. 156, *b*) $\overline{BC} \parallel \overline{B_1C_1}$, deci îi cunoaștem direcția. Fie M pe $\overline{AB_1}$; se ia $\overline{MN} = \overline{BC}$ dat și $\overline{MN} \parallel \overline{B_1C_1}$, apoi se translatează MN pînă cînd N ajunge în C pe AC_1. **454.** Se poate cunoaște

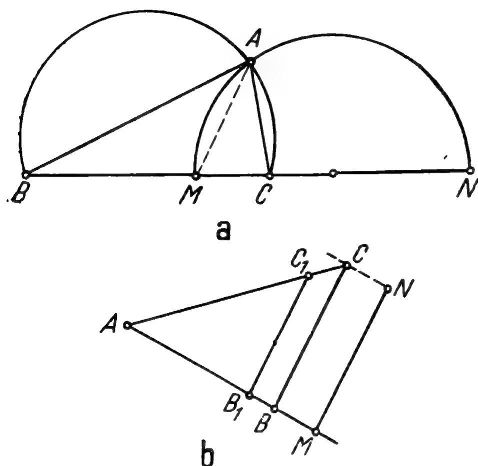


Fig. 156

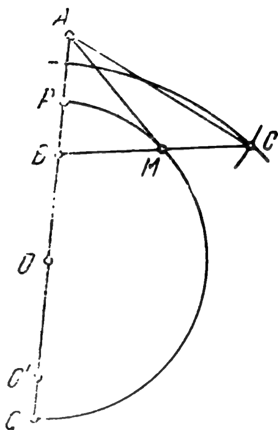


Fig. 157

piciorul M al bisectoarei, deci vîrful este la intersecția cercului descris din M ca centru cu bisectoarea ca rază, cu locul punctelor pentru care raportul distanțelor la extremitățile bazei este dat. **455.** Se construiește un triunghi oarecare ADE care să satisfacă primele două condiții. Pe bisectoarea unghiului DAE se ia $\overline{AA'}$ și prin A' se duce $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$. **456.** Se prelungește $\overline{AG}$ cu $\overline{GM} = \overline{AG}/2$. Paralela la AH, dusă prin M, intersectează pe HG în O. Din O, cu $\overline{OA}$ ca rază, se descrie un cerc care intersectează perpendiculara în M pe OM în B și C (G. M. IV). **457.** Pentru că $\overline{AM}:\overline{MB} = 2k$, rezultă că locul lui M este un cerc (O) descris pe $\overline{PQ}$ ca diametru, P și C fiind punctele ce divid pe $\overline{AB}$ în raportul $2k$ (fig. 157). Locul lui C este un cerc (O'), omotetic cu (O), centrul de omotetie fiind în B, iar raportul de omotetie 2. Intersecția cercului (O') cu cercul de centru A și rază $\overline{AC}$ este punctul C. **458.** Se construiește unghiul A, pe laturile căruia se iau $\overline{AB_1}$, $\overline{AC_1}$, așa ca $\overline{AB_1}:\overline{AC_1} = k$. Se unește A cu mijlocul lui $\overline{B_1C_1}$ și pe această

dreaptă se ia $\overline{AM}$ dat, apoi se duce $\overline{BC} \parallel \overline{B_1C_1}$. **459.** Se iau punctele D și D' care împart pe $\overline{BC}$ în raportul k și se construiește cercul (ω) cu diametrul $\overline{DD'}$. a) Dacă înălțimea dată este $\overline{AA'}$, atunci paralela la $\overline{BC}$ la distanța $\overline{AA'}$ intersectează cercul (ω) în două puncte A, A_1. Triunghiurile sînt ABC, A_1BC, dacă $\overline{AA'} < \overline{DD'}/2$. Putem avea două soluții, una sau nici una. b) Dacă se dă $\overline{BB'}$, se construiește triunghiul dreptunghic BCB'; CB' intersectează cercul (ω) în două puncte A, A_1. Discuția după cum C este interior sau exterior cercului (ω). **460.** Se construiește pe $\overline{PQ}$ ca bază un triunghi $A'PQ$ asemenea cu cel dat. Dreptele $A'P$, $A'Q$ întîlnesc pe RS în B' și C'. Se ia pe $\overline{AB}$ un punct D, așa ca $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{A'P} : \overline{PB'}$

Fig. 158

Fig. 159

etc. **461.** Fie $ABCD$ paralelogramul cerut, M și N mijloacele laturilor $\overline{BC}$ și $\overline{CD}$. Prin C se duce o paralelă la $\overline{BD}$ care intersectează pe AM și AN în M' și N'. În triunghiul $AM'N'$ se cunoaște $\overline{AM'}$, $\overline{AN'}$ și $\overline{AC} : \overline{M'N'} = \frac{3}{2}\,\overline{AC} : \overline{BD}$ (probl. 457) (G.M. XII). **462.** Fie $AB'C'$ o a doua poziție a triunghiului. $\Delta ABB' \sim \Delta ACC'$ (fig. 158). Se va deduce că $C'C$ face cu (D) un unghi egal cu $\sphericalangle BAC$. Dacă se ia o a treia poziție $AB''C''$ și se demonstrează același lucru pentru $C''C$, rezultă că C, C', C'' sînt coliniare. Locul este o dreaptă. **463.** Fie O punctul comun lui (D_1) și (D_2), ABC o poziție, $A'B'C'$ altă poziție a triunghiului (fig. 159). Avem $\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{B'C'} : \overline{BC} = \overline{OB'} : \overline{OB}$, deci $\Delta OAB \sim \Delta OA'B'$ și $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$; O, A, A' sînt coliniare. Locul este o dreaptă ce trece prin O. **464.** Fie ABC triunghiul format de cele trei drepte, M variabil pe $\overline{BC}$ și N, P proiecțiile lui M pe $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$, iar O

mijlocul lui $\overline{NP}$ (fig. 160). Patrulaterul $ANMP$ este inscriptibil. Deci dacă A' este proiecția lui A pe $\overline{BC}$, patrulaterul $ANA'P$ este și el inscriptibil și deci triunghiul $A'NP$ sau triunghiul $A'PO$ rămîne asemenea cu el însuși. Aplicînd problema 462, deducem că locul lui O este o dreaptă (G.M. XI). **465.** Raportul distanțelor de la un punct P al medianei, la laturi, este egal cu raportul distanțelor de la M la laturi. Se duc prin M perpendiculare pe $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$, apoi paralele la aceleași laturi și se formează triunghiuri dreptunghice asemenea. Se ia apoi pe $\overline{AB}$ segmentul $\overline{AC'} = \overline{AC}$

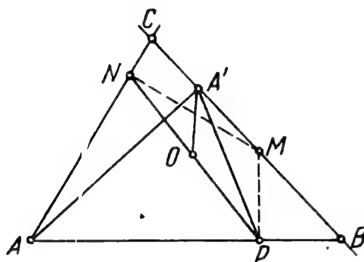


Fig. 160

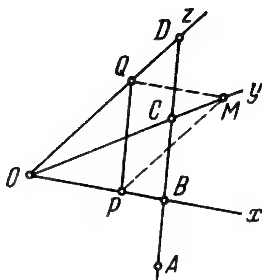


Fig. 161

și pe $\overline{AC}$, $\overline{AB'} = \overline{AB}$. Simediana lui ABC este mediană în $AB'C'$. **466.** Se ia B_1 mobil pe Ox, pe $\overline{AB_1}$ se construiește un triunghi asemenea cu $A'B'C'$, vîrful al treilea C_1 al acestui triunghi descrie o dreaptă care întîlnește pe Oy în C. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ are vîrful pe Ox. **467.** Se unește A cu un punct M mobil pe Ox, se ia pe $\overline{AM}$ un punct N așa ca $\overline{AM} : \overline{AN} = k$. Locul lui N este o paralelă la Ox, care intersectează pe Oy în C. **468.** Fie Oy între Ox și Oz (fig. 161). Se ia un punct M pe Oy și se duc paralele la Ox și Oz pînă intersectează pe Oz și Ox în Q și P. În paralelogramul $OQMP$, $\overline{PQ}$ este împărțită în două părți egale de Oy. Se duce prin A o paralelă la $\overline{PQ}$. **469.** Fie E fix pe Ox și M mobil pe Oy (fig. 162); se ia în prelungirea lui $\overline{EM}$ un punct N așa ca $\overline{EM} : \overline{MN} = m:n$. Locul lui N este o dreaptă care intersectează pe Oz în F. Se duce prin A o paralelă la EF. Metoda se poate folosi și la problema precedentă. **470.** Se duce $DG \parallel AC$, G fiind pe $\overline{BC}$. Avem $\overline{DF} : \overline{FE} = \overline{GC} : \overline{CE} = \overline{GC} : \overline{AD} = \overline{BC} : \overline{BA}$. **471.** Fie M și N punctele care împart în raportul dat segmentele $\overline{A_2D_1}$ și $\overline{B_2C_1}$. Se va observa că $\overline{BN} \# \overline{AM}$ și $\overline{CN} \# \overline{DM}$, deci $\overline{AB} \# \overline{MN} \# \overline{DC}$

(G.M.XIII). Se va observa că M, M_1, N și P, P_1, Q (fig. 163) sînt coliniare (probl. 448). **473.** Se va arăta că perechile de triunghiuri (ABC, $A'BB'$), (CDA, $C'DD'$) sînt asemenea și se va deduce că dreptele $A'B'$, $C'D'$ sînt paralele. Analog se va arăta că dreptele $B'C'$, $D'A'$ sînt paralele (G.M. XXXIII). **474.** Fie A_1, B_1, C_1, D_1 punctele care împart laturile $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ în raportul m: n. Se duce $B_1A' \parallel AC$, A' fiind pe $\overline{AB}$. Vom avea $\overline{B_1A'} = m\overline{AC} : (m+n)$

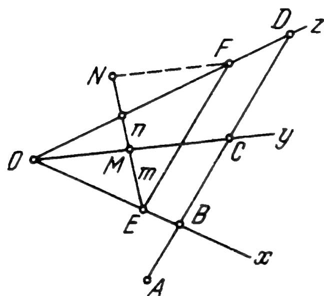


Fig. 162

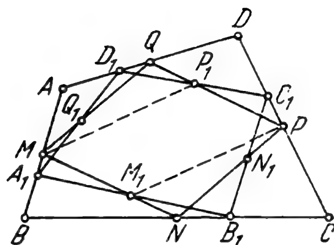


Fig. 163

și $\overline{D_1A'} = n\overline{BD} : (m+n)$. Deci A' este determinat (G.M. XXI). **475.** Fie N punctul unde AF întîlnește pe DE. Din $\Delta DNF \sim \sim \Delta CMF$ și $\Delta ENF \sim \Delta BMF$ se scoate $\overline{BM} : \overline{MC} = \overline{EN} : \overline{DN}$; din $\Delta ADN \sim \Delta ABM$ și $\Delta AEN \sim \Delta ACM$ se scoate $\overline{BM} : \overline{MC} = \overline{DN} : \overline{EN}$, deci M este mijlocul lui $\overline{BC}$. **476.** Fie a, b, c laturile necunoscute Avem $a\alpha = b\beta = c\gamma$. Se ia un punct A și un cerc (O) (fig 164). Se duc prin A trei segmente $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{AP}$, respectiv egale cu α, β, γ.

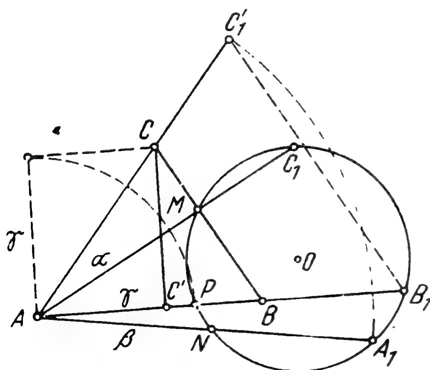


Fig. 164

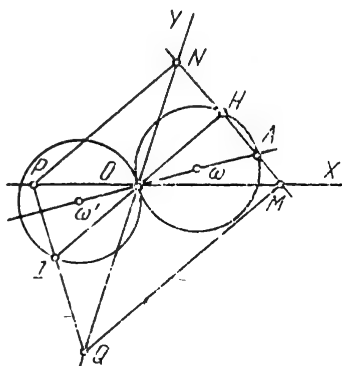


Fig. 165

Celelalte segmente, $\overline{AC_1}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{AB_1}$ vor fi proporționale cu laturile a, b, c. Construcția ca în figură, ABC este triunghiul căutat. **477.** Fie A_1, B_1, E, F, C_1, D_1 proiecțiile punctului M pe laturile $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ și diagonalele $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. Punctele A_1, C_1, E se află pe dreapta lui Simson a punctului M în raport cu triunghiul ACD, iar punctele C_1, D_1, E se află pe dreapta lui Simson a lui M în raport cu triunghiul BCD. Punctele M, E, F sînt coliniare. Cercul de diametru $\overline{AM}$ trece prin punctele A_1, F, C_1 iar cercul de diametru $\overline{BM}$ trece prin punctele B_1, F, D_1. În aceste două cercuri avem $\overline{EC_1}\cdot\overline{EA_1}=\overline{EF}\cdot\overline{EM}$ și $\overline{ED_1}\cdot\overline{EB_1}=\overline{EF}\cdot\overline{EM}$. Deci $\overline{EC_1}\cdot\overline{EA_1}=\overline{ED_1}\cdot\overline{EB_1}$ și punctele A_1, B_1, C_1, D_1 sînt conciclice (G.M. XXXI). **478.** a) Fie E intersecția diagonalelor. Avem $\Delta EAB \sim \Delta ECD$ și $\Delta EAD \sim \Delta EBC$, de unde deducem $a : a' = \overline{EA} : \overline{ED}$ și $b : b' = \overline{EA} : \overline{EB}$. Rapoartele fiind egale, $\overline{EB} = \overline{ED}$. b) În acest caz $a : a' = 2R : R\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Deducem $\overline{EB} : \overline{EC} = \sqrt{2}$ și $\overline{EC} : \overline{ED} = \sqrt{2}$, deci $\overline{EB} = \sqrt{2}\ \overline{EC}$; $\overline{ED} = \overline{EC}/\sqrt{2}$, din care rezultă $\overline{EB}=2\overline{ED}$ (R.M. T. III). **479.** Fie $\overline{BC}$ și $\overline{AD}$ bazele trapezului. Avem $\overline{EO} : \overline{AD}=\overline{BE} : \overline{BA}$ și $\overline{EO}=\overline{AD}\cdot\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BA}}$. La fel $\overline{OF}=\overline{AD}\cdot\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CD}}$.

Deoarece $\overline{BE} : \overline{BA}=\overline{CF}:\overline{CD}$, rezultă $\overline{OE}=\overline{OF}$. **480.** Fie H proiecția lui O pe MN (fig. 165). O și A fiind fixe, locul lui H este cercul de diametru $\overline{OA}$. Locul cerut este simetricul acestuia în raport cu O. **481.** Să dăm triunghiului ABC o mișcare de translație de mărime $\overline{Aa}$, în direcția Aa, pînă ce A vine în a (fig. 166). Triunghiul ABC devine aB_1C_1 (omotetice între ele). Fie b' și c' intersecțiile cu aC_1, aB_1 ale perpendicularelor din b și c pe AC și AB, iar P intersecția lor. Patrulaterele inscriptibile B_1bcc', C_1bcb' dau $\overline{ab}\cdot\overline{ac} = \overline{ac'}\cdot\overline{aB_1}$ și $\overline{ab}\cdot\overline{ac}=\overline{ab'}\cdot\overline{aC_1}$, de unde $\overline{aC_1}\cdot\overline{ab'}=\overline{aB_1}\cdot\overline{ac'}$ și deci patrulaterul $B_1C_1b'c'$ este inscriptibil. Cum $b'c'aP$ este și el inscriptibil, rezultă că $Pa \perp B_1C_1$ și deci $Pa \perp BC$. Punctul P este ortopolul dreptei (Δ) în raport cu triunghiul ABC (probl. 280). Demonstrația

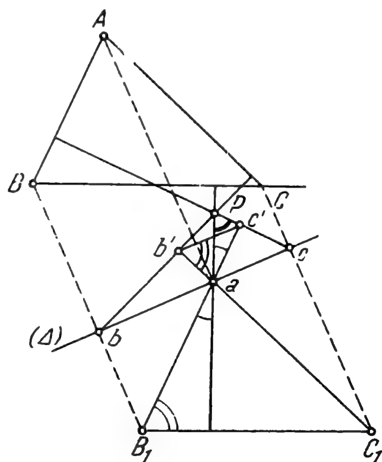


Fig. 166

de mai sus se aplică cuvînt cu cuvînt pentru cazul izopolului (probl. 281). **482.** Se duc perpendicularele din A_1, A_2, A_3 pe (Δ). Dintr-un punct M luat pe perpendiculara în A_1 se duc paralelele MN și MP, la $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$, N și P fiind pe perpendicularele în A_2 și A_3 pe (Δ). Potrivit teoremei ortopolului (probl. 481), aplicată dreptei (Δ) față de triunghiul MNP, se vede că $\overline{NP}$ trebuie să fie paralelă cu $\overline{BC}$. Cum $\Delta MNP \sim \Delta ABC$ trebuie ca $\overline{MN} : \overline{AB} = \overline{NP} : \overline{BC} = \overline{PM} : \overline{CA}$ sau notînd cu a, b c, proiecțiile punctelor A, B, C pe (Δ), $\overline{bc} : \overline{A_2A_3} = \overline{ca} : \overline{A_3A_1} = \overline{ab} : \overline{A_1A_2}$, condiție necesară și suficientă. **483.** Fie β și γ punctele în care proiectantele Bb și Cc întîlnesc latura $\overline{B'C'}$, iar α punctul de întîlnire al dreptelor Aa, și BC (fig. 167). Avem $\overline{\beta\gamma} = \overline{BC}$. Rămîne să dovedim că $\overline{\beta C'} = \overline{\gamma B'}$, pentru ca să avem $\overline{BC} = \overline{B'C'}$. Triunghiurile $b\beta C'$, $\gamma c B'$ sînt respectiv asemenea cu triunghiurile $A\alpha C$, $BA\alpha$. Deci $\overline{\beta C'} : \overline{\beta b} = \overline{\alpha C} : A\alpha$ și $\overline{\gamma B'} : \overline{\gamma c} = \overline{\alpha B} : \overline{A\alpha}$. Dar $\overline{\alpha B} : \overline{\alpha C} = \overline{ab} : \overline{ac} = \overline{\beta b} : \overline{\gamma c}$ și deci $\overline{\gamma B'} = \overline{\beta C'}$ (G.M.XX). **484.** Se duce prin B o dreaptă arbitrară (fig. 168) care întîlnește pe CM în E, pe AM în F. CF intersectează pe AE în N. NM este paralela cerută. **485.** Se iau punctele A, B pe (D) (fig. 169); AM, BM întîlnesc pe (D') în E și F. BE și AF se intersectează în O, MO întîlnește pe (D) și (D') în G și H. AH și GF se întîlnesc în N. MN este paralela cerută, căci $\overline{NF} : \overline{NG} = \overline{HF} : \overline{AG} = \overline{HF} : \overline{GB} =$

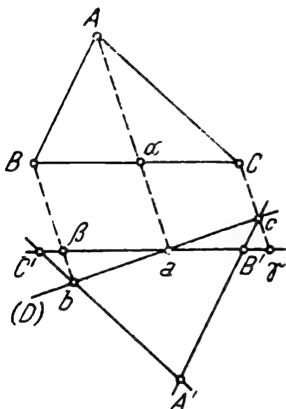


Fig. 167

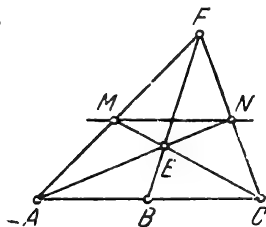


Fig. 168

$= \overline{MF} : \overline{MB}$. **486.** Diagonalele $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ se întîlnesc în O. Dreptele $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ întîlnesc dreapta dată (Δ) în a și b, iar paralela la AD dusă cu rigla prin O (probl. 485) intersectează pe (Δ) în c; $\overline{ac} = \overline{cb}$. Deci se poate duce prin punctul dat, numai cu rigla, o paralelă la (Δ) (probl. 484). **487.** Printr-un punct oarecare M se

duce o paralelă la $\overline{AB}$ şi se ia un punct N pe ea. Se poate găsi mijlocul P al lui $\overline{MN}$. AM şi BP se intersectează în O, iar ON intersectează pe $\overline{AB}$ în punctul căutat C. **488.** Presupunem că M nu se află pe dreaptă. Se pot duce numai cu rigla dreptele $MN \parallel AB$, $MP \parallel AC$, N şi P fiind pe (Δ), apoi $NQ \parallel BD$; $PR \parallel AD$. NQ şi PR se întîlnesc în O; MO este perpendiculara căutată, căci în triunghiul MNP, NQ, PR sînt două înălţimi, MO este

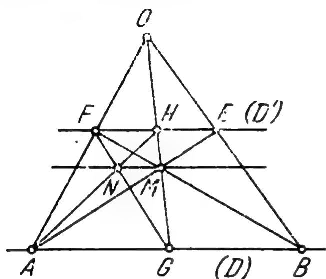


Fig. 169

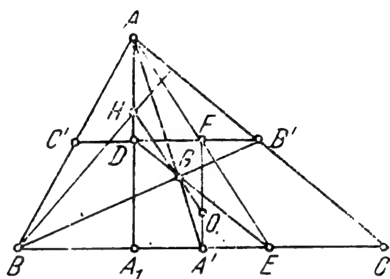


Fig. 170

a treia. Dacă M este pe (Δ) se va duce o paralelă oarecare la (Δ) şi apoi din M o perpendiculară pe ea. **489.** Se construieşte pe $\overline{PO}$ punctul P', aşa ca $\overline{PO} = \overline{OP'}$. Din P' se duce o perpendiculară pe Px; piciorul Q al acestei perpendiculare este punctul căutat. **490.** Fie G punctul de întîlnire al medianelor, H al înălţimilor triunghiului ABC, iar A', B', C' mijloacele laturilor (fig. 170). $\overline{B'C'}$ intersectează înălţimea $\overline{AA_1}$, în D, iar DG intersectează pe $\overline{BC}$ în E. Dreapta ce uneşte pe A' cu F, intersecţia lui $\overline{B'C'}$ cu $\overline{AE}$, este perpendiculară pe $\overline{B'C'}$, căci $\overline{BE} = \overline{CA_1}$. Centrul cercului ABC este intersecţia lui HG cu $A'F$ (G.M.IX). **491.** Prin a, b se duc paralele la Oy (probl. 486) şi prin a', b' se duc paralelele la Ox, ce formează rombul $\alpha\beta\gamma\delta$. Paralelele duse prin O la diagonalele rombului sînt bisectoarele unghiului xOy (probl. 484). (G.M.XVII). **492.** Fie A'' diametral opus lui A. Se va observa că $\Delta AA'C \sim \Delta ABA''$. **493.** Se va aplica problema precedentă triunghiurilor PBC, PCA, PAB. **494.** Pe prelungirea lui $\overline{BC}$ se ia $\overline{BB'} = \overline{BA}$, $\overline{CC'} = \overline{CA}$, iar prin B' şi C' se duc paralelele la $\overline{BA}$ şi $\overline{CA}$, care se întîlnesc în A' pe bisectoarea $\overline{DA}$. Se observă că A este centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$. A' este intersecţia lui $\overline{DA}$ cu cercul descris pe $\overline{DD'}$ ca diametru, D' fiind conjugatul armonic al lui D în raport cu $\overline{B'C'}$ (G.M. VIII). **495.** Fie ω centrul cercului celor nouă puncte, O centrul cercului circum-

scris, E, F mijloacele coardei și arcului BC; $A\omega$ fiind bisectoarea unghiului OAH, triunghiul OAH este isoscel, H fiind punctul de întîlnire al înălțimilor $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$. Rezultă că $2\overline{OE} = \overline{OF}$ și deci $\sphericalangle A = 60°$. Se mai știe că $2\overline{AB'} = \overline{AC_1}$ și $2\overline{AC'} = \overline{AB_1}$ (probl. 243). Construcția rezultă de la sine. **496.** Fie $ABCD$ pătratul căutat și A punctul dat (fig. 171). *Cazul I.* Vîrfurile B, D se găsesc pe două cercuri (O) și (O'). În A se ridică o perpendiculară $A\omega$ pe OA, pe care se ia $\overline{A\omega} = \overline{AO}$. Se observă că $\overline{D\omega} = \overline{OB}$ etc. *Cazul II.* B și C se găsesc pe două cercuri (O), (O''). În O se ridică o perpendiculară pe OA, pe care se ia $\overline{O\omega'} = \overline{OA}$. Se va observa că triunghiurile OAB, $\omega'AC$ sînt asemenea și raportul de asemănare este constant. Problema poate fi privită și astfel: *Cazul I.* B vine în D după o rotație de 90°, deci se rotește cercul (O) de 90° pînă vine în (ω) și intersectează pe (O') în D, D' (două soluții). *Cazul II.* Se rotește cercul (O) de 45° pînă vine în (O_1), apoi se transformă prin asemănare pînă vine în (ω'); $A\omega' : AO_1 = \sqrt{2}$ (G.M.VIII). **497.** Fie M și N intersecțiile paralelei duse prin P la DE, cu OA și BO, iar G și I simetricele lui E și N în raport cu OP. Se va observa că $DP \parallel MI$ și apoi că $NL \parallel PE$, L fiind simetricul lui M în raport cu PO (G.M. XV). *Altă soluție.* Fie H intersecția lui OP cu DE și Q intersecția lui PD cu paralela dusă

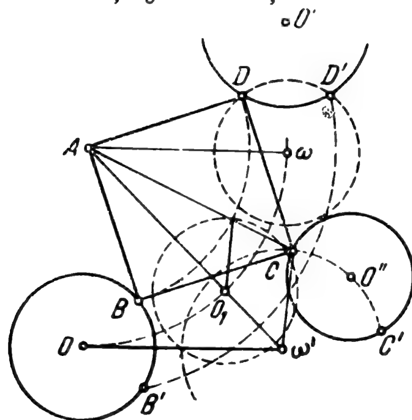


Fig. 171

prin N la OA. PH este bisectoare în triunghiul PDE, deci $\frac{HE}{HD} = \frac{PE}{PD}$; însă $\frac{HE}{HD} = \frac{PN}{MP} = \frac{PQ}{PD}$. Rezultă $PE = PQ$. Se construiește deci triunghiul isoscel PEQ cu vîrful P dat, baza $EQ \parallel OP$ avînd extremitățile pe OB, NQ (problema 318). **498.** Centrul exterior de

asemănare este confundat în punctul de contact, centrul interior este situat între centrele cercurilor. **499.** AB, $A'B'$ se întîlnesc în M (fig. 172); patrulaterele $OMAA$, $OMBB'$ sînt inscriptibile. De aici rezultă construcția. *Altfel*: AA', BB' se întîlnesc în N; patrulaterele $ONA'B'$, $ONAB$ sînt inscriptibile. **500.** $\triangle AID \sim \triangle BIC$, deci $\overline{AD} : \overline{BC} = \overline{DI} : \overline{IB} = \overline{AE} : \overline{EB}$. Rezultă că triunghiurile dreptunghice AED și EBC sînt asemenea, deci au unghiurile corespunzătoare egale. Dar $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DEI$ și $\sphericalangle BCE = \sphericalangle CEI$, prin urmare, EI este bisectoare (v. și probl. 329). **501.** Fie patrulaterul $ABCD$, iar O punctul dublu (probl. 499) al figurilor asemenea care au perechile de puncte (A, D) și (B, C)

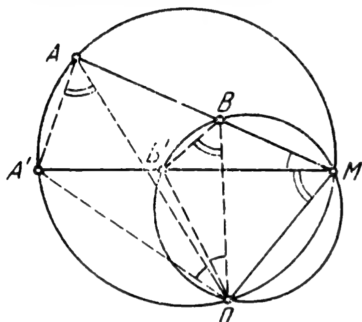


Fig. 172

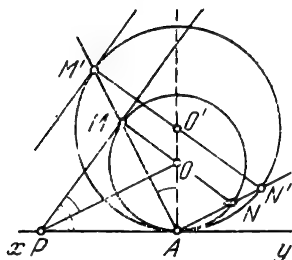


Fig. 173

ca puncte omoloage. Avem $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ și se deduce $\triangle AOD \sim \triangle BOC$. Deci O este de asemenea polul dublu al figurilor asemenea care au ca puncte omoloage grupurile (A, B) și (C, D) și în mod analog O este polul dublu al figurilor asemenea ce au pe (A, C) și (B, D) ca puncte omoloage. **502.** Se consideră două din cercuri (O) și (O') (fig. 173), punctele de contact M, M' și diametralele lor opuse N, N' care sînt și ele puncte de contact. $\triangle AOM \sim \triangle AO'M'$, deci A, M, M' sînt coliniare; A, N, N', de asemenea. Locul se compune din două drepte perpendiculare ce trec prin A. *Altfel.* Tangenta în M la cercul O intersectează pe xy în P; patrulaterul $OMPA$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle OAM = \frac{1}{2} \sphericalangle APM =$ = const. De asemenea OAN. **503.** Locul se compune din patru drepte care trec prin O. **504.** Fie H' ortocentrul lui $AB'C'$, O centrul cercului circumscris lui ABC, M mijlocul laturii $\overline{BC}$. Avem $\overline{AH'} : \overline{AH} = \overline{AB'} : \overline{AB} =$ const. Dar $\overline{AH} = 2\overline{OM}$, deci $\overline{AH'} =$ = const și $\overline{OH'} = \overline{OA} - \overline{AH'} =$ const. Un cerc concentric cu cercul circumscris (G.M. XX). **505.** În triunghiul BCD, CA și

DM sînt mediane, deci $CN = \frac{2}{3}\overline{CA}$. Locul lui N este un cerc (fig. 174). *Altfel.* Locul lui D este un cerc cu centrul C. În triunghiul BCD, $\overline{CA}$, $\overline{DM}$ sînt mediane, deci $\overline{MN} = \overline{MD}/3$. Locul lui N este un cerc. **506.** Presupunem că D' este intersecția lui PQ cu paralela prin E la FD (fig. 175). Triunghiurile isoscele DBF și CBP au bazele paralele, deci $\overline{FP} = \overline{DC} = \overline{CE}$. Analog $\overline{BD} = \overline{QE} = \overline{BF}$. Avem $\overline{FD} : \overline{PC} = \overline{BD} : \overline{BC} = \overline{QE} : \overline{QC} = \overline{ED'} : \overline{PC}$ Primul și ultimul raport dau $\overline{DF} = \overline{ED'}$. Prin enunț $\overline{FD} = \overline{ED_1}$, deci $\overline{ED'} = \overline{ED_1}$ și avînd aceeași direcție, D' se confundă cu D_1 (G.M. XXX). **507.** Fie $A'B'$ o a doua poziție a dreptei. $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OA'} : \overline{OB'} = k$, deci $A'B' \parallel AB$. **508.** Fie M' poziția lui M cînd dreapta vine în $A'B'$. MM' trece prin O. Locul este o dreaptă ce trece prin O. **509.** Fie M pe AB așa ca $\overline{MA} : \overline{MB} = \overline{IA'} : \overline{IB'} = m$ (fig. 176). Se duce $MP \parallel BB'$; $B'P \parallel BM$; $A'Q \parallel AM$; $MQ \parallel AA'$. Avem $\overline{MA} : \overline{MB} = \overline{QA'} : \overline{PB'} = \overline{IA'} : \overline{IB'}$, deci P, I, Q sînt coliniare. Dreptele MP, MQ sînt fixe, $\overline{MQ} : \overline{MP} = \overline{AA'} : \overline{BB'} = k$, deci PQ rămîne paralelă cu o direcție fixă, iar I descrie o dreaptă care trece prin M. **510.** Paralelele duse prin A la Ox și prin B la Oy se intersectează pe bisectoare în E (fig. 177). Avem $\overline{MA} : \overline{MP} = \overline{ME} : \overline{MO} = \overline{MB} : \overline{MQ}$, deci $PQ \parallel AB$. Fie (Δ) o dreaptă care trece prin O și M pe această dreaptă. Ca proprietatea să se mențină trebuie ca raportul distanțelor lui A și B, respectiv la Ox și Oy, să fie egal cu raportul distanțelor lui M la Ox și Oy, acesta din urmă fiind constant. **511.** Se duce $BE \parallel MN$, întîlnind pe AP în E (fig. 178); DE intersectează pe MN în F. Se va observa că $DE \parallel AC$, deci $EFNB$ este un trapez isoscel și prin urmare punctele B, L, E, P, F, N sînt toate pe un cerc. De aici rezultă că $\triangle DFL \sim \triangle DBE$, deci $\overline{DL} : \overline{DF} = \overline{DE} : \overline{DB}$, apoi $\overline{DB} : \overline{DX} = \overline{DE} : \overline{DF}$ și înmulțind, parte cu parte, $\overline{DL} : \overline{DX} = \overline{DE}^2 : \overline{DB}^2 =$ const. **512.** $\overline{CA_2} = \overline{CB_2}$, deci $A_2B_2 \perp CC_1$. Unghiul făcut de A_1B_1 cu CC_1 are ca măsură (arc CB_1 + arc A_1B+arc BC_1)/2 $=180°/2=90°$. Rezultă $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sînt omotetice și deci A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sînt concurente în centrul de omotetie. Cercurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ au evident același centru de omotetie ω; acesta se află, deci, pe dreapta OI astfel ca $\overline{\omega I} : \overline{\omega O} = r : R$ (R.M.T.). **513.** Se va observa că pe lîngă relația dată există și relația $\overline{DG} : \overline{DE} = \overline{AI} : \overline{AF}$. **514.** Paralela prin P la BK intersectează pe AB

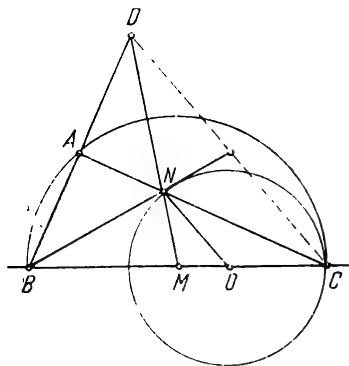


Fig. 174

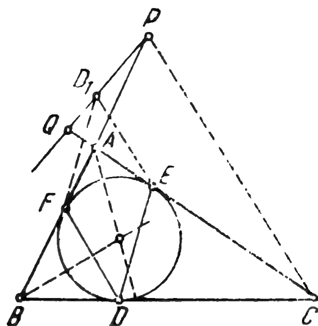


Fig. 175

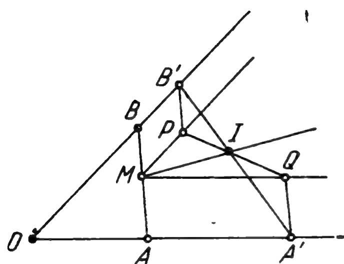


Fig. 176

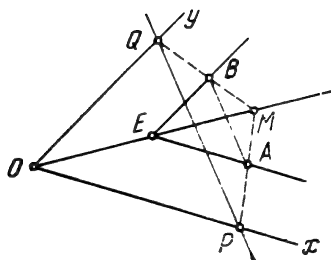


Fig. 177

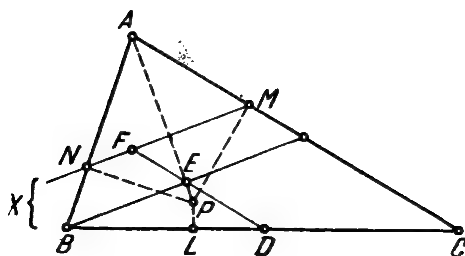


Fig. 178

în Q (fig. 179), astfel încît $\overline{KA}:\overline{KP}=\overline{BA}:\overline{BQ}=m$, deci Q este fix. Apoi $\overline{LM}:\overline{LP}=\overline{LB}:\overline{LQ}=$ const, deci M descrie un cerc cu centrul pe OL (probl. 421) (R.M.T. IV). **515.** Se va observa că $\triangle ONP\sim\triangle O'N'P$, deci $PO:PO'=R:R'$ (fig. 180). Rezultă că P este intersecția cercului (C'') cu cercul descris pe $\overline{SS'}$ ca dia-

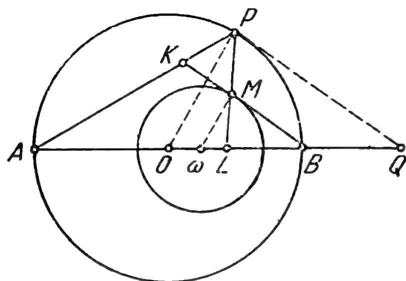


Fig. 179

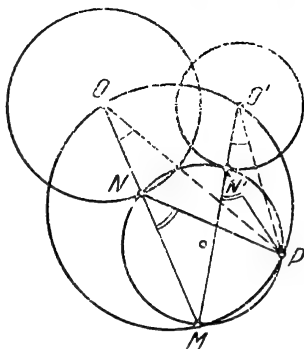


Fig. 180

metru, S și S' fiind centrele de asemănare ale celor două cercuri date (G.M.XIII). **516.** Ducem prin F paralela la EB, care intersectează pe (Δ) în L (fig. 181). Fie I intersecția lui EF cu (Δ) și P un punct pe (Δ) de partea opusă lui A față de B. Avem $\sphericalangle EBP=$ $=\sphericalangle EDB=\sphericalangle ADF=\sphericalangle FAL$, dar $\sphericalangle EBP=\sphericalangle FLA$, deci triunghiul FAL este isoscel. Rezultă, deoarece $\overline{FL}\parallel\overline{EB}$, $\overline{IF}:\overline{IE}=\overline{FL}:\overline{EB}=$

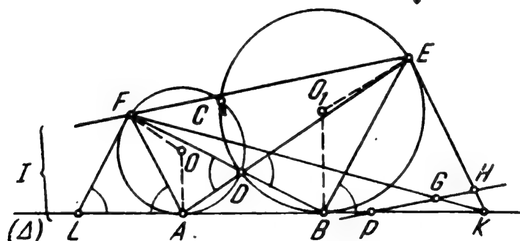


Fig. 181

$=\overline{FA}:\overline{EB}$. Dar $\triangle AOF\sim\triangle BO_1E$ ca avînd unghiurile de la bază complementare cu $\sphericalangle FAL$ și $\sphericalangle EBM$, deci $\overline{FA}:\overline{EB}=\overline{OA}:$ $:\overline{O_1B}$. Se deduce $\overline{IF}:\overline{IE}=\overline{OA}:\overline{O_1B}$. Fie K intersecția lui FG cu (Δ) și K' a lui EH cu (Δ). Avem $\overline{PG}:\overline{IF}=\overline{PK}:\overline{IK}$ și $\overline{PH}:\overline{IE}=$ $=\overline{PK'}:\overline{IK}$. Deoarece $\overline{PG}=\overline{OA}$, $\overline{PH}=\overline{O_1B}$, primele două rapoarte

sînt egale, deci $\overline{PK} = \overline{PK'}$ (G.M.XXX). **517.** Se duce $BN \parallel SH$ care intersectează pe SA în N, $SM \parallel AB$ care intersectează pe BC în M și pe BN în L (fig. 182). Paralela la SH dusă prin P intersectează pe MN în Q, căci $\overline{PR} : \overline{RQ} = \overline{BL} : \overline{LN} = \overline{SA} : \overline{SN} = \overline{HA} : \overline{HB}$. Din $\triangle MDS \sim \triangle ADB$ și $\triangle DBN \sim \triangle DCS$ se va deduce că $MN \parallel AC$. Deoarece $\overline{QM} : \overline{QN} = \overline{MP} : \overline{PB} = \overline{SB'} : \overline{B'B}$, rezultă că Q împarte pe $\overline{MN}$ (deci QD pe AC) într-un raport

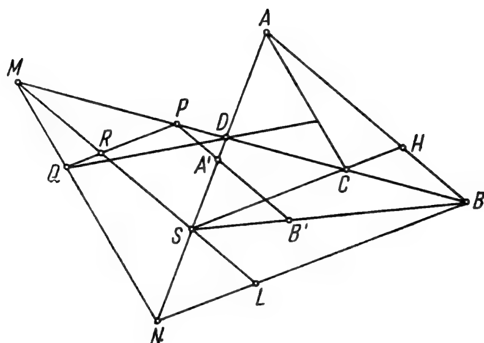


Fig. 182

independent de H și BC. **518.** N este fix, M mobil pe SM, Q descrie o paralelă la AB care intersectează pe SN în T așa că $\overline{ST} : \overline{TN} = \overline{SB'} : \overline{B'B}$. **519.** M este fix, N mobil pe SA. Q descrie o paralelă la SA, care intersectează pe MD în U așa că $\overline{MU} : \overline{UD} = \overline{SB'} : \overline{B'B}$. **520.** M, N fixe; Q descrie $MN \parallel AC$. **521.** Se duce în P o perpendiculară pe $\overline{OP}$, care intersectează diametrul perpendicular pe $\overline{AB}$ în C. Avem $\triangle OPC \sim \triangle OMN$; $\overline{OP} : \overline{MN} = \overline{OC} : \overline{OM} = k$, deci C este fix. Locul este un cerc descris pe $\overline{OC}$ ca diametru. **522.** Se va observa că $\overline{CF} : \overline{FB} = k \cdot \overline{AC} : \overline{AB}$, deci punctul F este determinat pe $\overline{BC}$. *Altfel.* Din enunț rezultă că DE are direcție fixă. Se duce $D'E'$ astfel ca $AD' : AE' = k$ și fie M mijlocul lui $D'E'$. AM taie pe BC în F. **523.** Avem $\overline{CM} : \overline{CA} = \overline{MP} : \overline{AB}$ și $\overline{AM} : \overline{AC} = \overline{MQ} : \overline{CD}$. Se adună parte cu parte. **524.** Avem $\overline{HO} : \overline{IN} = \overline{AH} : \overline{AI}$; $\overline{HO} : \overline{IM} = \overline{HB} : \overline{IB}$ (fig. 183). Adunăm, ținînd seama că $\overline{AI} = \overline{IB}$ și $\overline{AH} + \overline{HB} = 2\overline{IA}$ (G.M.XXVI). **525.** $\overline{EO} : \overline{BC} = \overline{AE} : \overline{AB}$; $\overline{EO} : \overline{AD} = \overline{EB} : \overline{BA}$. Adunînd parte cu parte și înmulțind cu 2, se obține relația cerută. **526.** Notăm

$\overline{AO} = a$; $\overline{OB} = b$; $\overline{OC} = c$; $\overline{OD} = d$ (fig. 184). Paralelele prin A și D la EF intersectează respectiv pe BD și AC în G și H.

Din triunghiul BAG și paralela EO, deducem $\frac{\overline{EO}}{\overline{AG}} = \frac{b}{b+a}$, iar din

$\triangle CHD$ și paralela OF, $\frac{\overline{FO}}{\overline{DH}} = \frac{c}{c+d}$, de unde $\frac{\overline{OF}}{\overline{OE}} = \frac{c(b+a)}{b(d+c)} \frac{\overline{DH}}{\overline{AG}}$.

Dar $\overline{DH} : \overline{AG} = \overline{OD} : \overline{OG} = d : a$, deci $\frac{\overline{OF}}{\overline{OE}} = \frac{cd(b+a)}{ab(d+c)}$ care se

poate scrie sub forma din enunț. **527.** Se descrie pe $\overline{A_1C_1}$ un arc capabil de unghiul B, pe $\overline{A_1B_1}$ un arc capabil de unghiul C. Va trebui să se ducă o dreaptă $B''A_1C''$, mărginită la cele două segmente, așa ca $\overline{B''A_1} : \overline{A_1C''} = \overline{BA'} : \overline{A'C}$. Pentru aceasta se unește A_1 cu un punct M mobil pe primul segment și pe prelungirea lui $\overline{MA_1}$ se ia $\overline{A_1N} = \overline{A_1M} \cdot \overline{BA'} : \overline{A'C}$. Locul lui N este un cerc care intersectează cercul al doilea în C''; prelungirea lui $\overline{C''A_1}$ ne dă pe primul arc pe B''. $B''C_1$ și $C''B_1$ se intersectează în A''. Luînd pe $\overline{AC}$ un punct B', așa ca $\overline{CB'} : \overline{B'A} = \overline{C''B_1} : \overline{B_1A''}$ și pe $\overline{AB}$ un punct C', așa ca $\overline{AC'} : \overline{C'B} = \overline{A''C_1} : \overline{C_1B''}$, obținem triunghiul căutat $A'B'C'$. *Altfel.* Fie B'' un punct pe AC și $\triangle A'B''C'' \sim \triangle A_1B_1C_1$. Cînd B'' descrie dreapta AC, C'' descrie o dreaptă (Δ) (probl. 462) care inter-

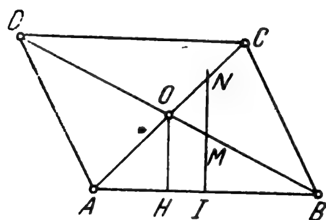


Fig. 183

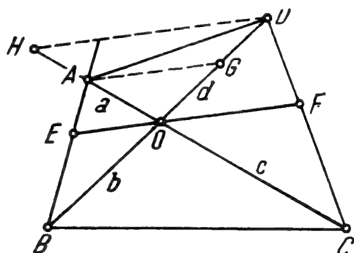


Fig. 184

sectează pe AB în C', vîrful triunghiului căutat. **528.** Se duce în triunghiul ABC paralela $n'p'$ la latura np. Din punctele de întîlnire n' și p' cu $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ se duc paralele respectiv cu $\overline{mp}$, $\overline{mn}$,

care se întîlnesc în m'. Dreapta Am' întîlnește pe $\overline{BC}$ în M, unul din vîrfurile triunghiului MNP căutat. **529.** Se întrebuințează metoda inversă. Se pleacă de la patrulaterul $A'B'C'D'$ și i se circumscrie un patrulater $A_1B_1C_1D_1$ asemenea cu $ABCD$. Se construiește mai întîi $\triangle A_1B_1D_1 \sim \triangle ABD$. **530.** Se construiește pe $\overline{AD}$, în afară, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Triunghiul CDE se poate construi, căci cunoaștem $\overline{CD}$, $\overline{DE} = \overline{BC} \cdot \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{BC} : k$ și $\sphericalangle CDE = \alpha$. Pe de altă parte, din $\overline{AC} : \overline{AD} = k'$ și $\overline{AC} : \overline{AE} = \overline{AB} : \overline{AD} = k$, se vede că A se găsește la intersecția a două cercuri care se pot construi. În sfîrșit, în triunghiul ABC cunoaștem $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ și $\sphericalangle B = \alpha - \sphericalangle D$. **531.** Rezultă din $\triangle A'C'C \sim \triangle AC'D'$, $\triangle A'B'B \sim \triangle B'AD'$ și $\overline{BA'} = \overline{A'C}$. **532.** BF și DE se intersectează în J, DE și FH în K; prin J se duce o paralelă la AD care intersectează pe FH în L, pe CD în M și pe AB în N. Avem $\overline{CG} : \overline{CM} = \overline{BE} : \overline{BN} = \overline{FK} : \overline{FL} = \overline{DK} : \overline{DJ} = \overline{ML} : \overline{MJ} = \overline{IG} : \overline{IJ}$. **533.** Se duc prin B, D paralele la AD și AB care se întîlnesc în G (fig. 185). $EH \parallel AD$; $FH \parallel AB$. DG intersectează pe EH în I, BG pe FH în K. După problema precedentă, C, G, H sînt coliniare, mijloacele segmentelor $\overline{AC}$, $\overline{IG}$, $\overline{AH}$ sînt deci coliniare. Mijlocul lui $\overline{AG}$ este și al lui $\overline{BD}$, mijlocul lui $\overline{AH}$ este și al lui $\overline{EF}$. **534.** Fie hexagonul $ABCDEF$ și H, I, K respectiv intersecțiile perechilor de drepte (AB, DE); (BC, EF); (CD, FA) (fig. 186). Să presupunem că dreptele AI, AH, DI, DH sînt fixe și considerăm cun cerc variabil trecînd prin A și D. Punctele de intersecție B, C, E, F ale acestui cerc cu dreptele fixe se mișcă pe aceste drepte. Dreptele BE, EF, BC păstrează direcții fixe. Triunghiurile BEK și CFK au laturile de direcții fixe. Locul punctului K este pe de o parte o dreaptă care trece prin I și, pe de altă parte, o dreaptă care trece prin H, deci este dreapta IH. **535.** Fie O intersecția dreptelor AC și HF, iar O' intersecția

Fig. 185

dreptelor AC și EG (fig. 187). Triunghiurile AOH, CFO au două unghiuri egale și două unghiuri suplimentare. Deci $\overline{AH} : \overline{CF} = \overline{AO} : \overline{CO}$. Analog obținem $\overline{AE} : \overline{CG} = \overline{AO'} : \overline{CO'}$. Dar $\overline{AH} = \overline{AE}$ și $CF = CG$. Deci O și O' se confundă. **536.** Fie E intersecția laturilor AB, CD; F intersecția laturilor BC, AD; M, N mijloacele diagonalelor $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. Bisectoarea unghiului E întîlnește laturile BC, AD în G, H, iar bisectoarea unghiului F întîlnește laturile

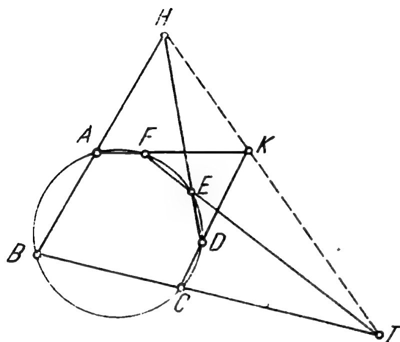


Fig. 186

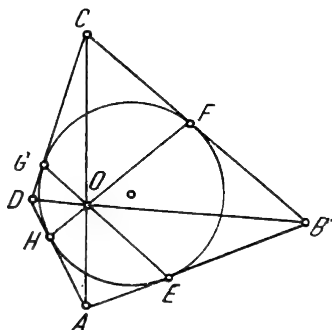


Fig. 187

CD, AB în I și J. Figura $CHIJ$ este un romb. Bisectoarea FJ dă $\overline{AJ} : \overline{BJ} = \overline{AF} : \overline{BF}$; iar triunghiurile asemenea AFC, BFD dau $\overline{AF} : \overline{BF} = \overline{AC} : \overline{BD}$, deci $\overline{AJ} : \overline{BJ} = \overline{AC} : \overline{CD}$. Analog bisectoarea EH și triunghiurile asemenea AEC, DEB sau $\overline{AH} : \overline{DH} = \overline{AE} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{BD}$. Rezultă că $\overline{AJ} : \overline{BJ} = \overline{AH} : \overline{DH}$ și deci $HJ \parallel BD$. Analog $HI \parallel AC$. Dreapta BM întîlnește pe $\overline{GJ}$ în mijlocul său K, iar DM întîlnește pe $\overline{IH}$ în mijlocul său L. Dreapta LK trece deci prin punctul O, centrul rombului, în care se întîlnesc cele două bisectoare. Cum $LK \parallel BD$, punctul O aparține medianei MN a triunghiului BMD. **537.** Se va observa că triunghiurile AOC, BOD sînt egale, deci $\overline{OA} = \overline{OB}$ și $\overline{OC} = \overline{OD}$. Se va observa apoi că $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OIB = 180° - \sphericalangle OID = \sphericalangle OCD$. Deci triunghiurile OMA și ONC sînt asemenea. **538.** Se va observa că triunghiurile MAC', MBA' și MCB' sînt asemenea, deci $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBC = \sphericalangle MCA$. Se deduce că M se află la intersecția cercului dus prin A și tangent la $\overline{BC}$ în B, cu cercul dus prin B și tangent la $\overline{CA}$ în C. **539.** Se va presupune problema rezolvată. Se duce $PR \parallel AC$; $CR \parallel PQ$

(fig. 188). BR intersectează pe AC în S. Se duce $ST \parallel PQ$ care intersectează pe BC în T. Avem $\overline{BP} = \overline{PR}$, deci $\overline{BA} = \overline{AS}$. Apoi din $\overline{BR} : \overline{BS} = \overline{CR} : \overline{ST} = \overline{PR} : \overline{AS}$ și din $\overline{CR} = \overline{PR}$ se deduce $\overline{AS} =$

Fig. 188

$= \overline{ST}$. În sfîrșit, se observă că $CP \parallel TA$. De aici rezultă construcția. **540.** Fie $A'B'C'$ un triunghi care are B' pe (D_1), C' pe (D_2) și direcția laturii $B'C'$ fixă (fig. 189). Dacă triunghiul se deplasează rămînînd asemenea cu el însuși, A' descrie o dreaptă ce trece prin O, intersecția lui (D_1) cu (D_2) (probl. 463). Pentru ca $A'B'C'$ să fie asemenea cu triunghiul cerut ABC, trebuie ca A' să se afle pe dreapta OA. De aici rezultă construcția: ducem $B'C'$ paralelă cu direcția dată, B' pe (D_1) și C' pe (D_2), apoi construim arcele de cerc capabile de unghiul dat A; acestea intersectează OA în A' și A''. Se duce $AB \parallel A'B'$ și $AC \parallel A'C'$. Triunghiul ABC este o soluție. A doua soluție AB_1C_1 se obține ducînd $AB_1 \parallel A''B'$; $AC_1 \parallel A''C'$. În cazul cînd (D_1) și (D_2) sînt paralele, locul lui A' este o paralelă la (D_1) și (D_2), iar triunghiurile ABC și AB_1C_1 au laturile ce trec prin A în prelungire (R.M.F. III).

Fig. 189

X. **541.** Din $\triangle BMP \sim \triangle QNC$. **542.** Din $\triangle BEF \sim \triangle BCD$, E intersecția lui $\overline{BD}$ cu $\overline{AF}$, rezultă $\overline{BF} \cdot \overline{BC} = \overline{BE} \cdot \overline{BD} = \overline{AB}^2$. **543.** Se va observa că triunghiul OBC este dreptunghic. **544.** $\overline{BC}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2$. Se exprimă $\overline{BG}$ din triunghiul BGC' și $\overline{CG}$ din triunghiul CGB (fig. 190). Ținînd seama de proprietatea medianelor rezultă relația cerută. **545.** Fie C punctul de contact al cercurilor, D punctul unde tangenta în C intersectează pe AA'. Se observă că

$\overline{DA} = \overline{DC} = \overline{DA'}$, $\sphericalangle \overline{ODO'} = 90°$, deci $\overline{DC}^2 = R \cdot R'$. **546.** Din triunghiul ABE se găsește $\overline{CE} = 64/5$ m, C fiind între B și E, apoi din ADE se găsește $\overline{AE} = 156/5$m. Perimetrul este 64 m. **547.** Se observă

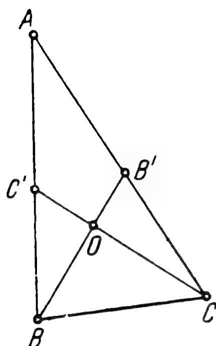


Fig. 190

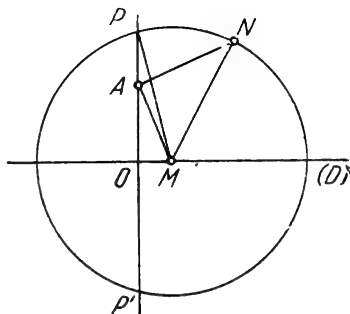


Fig. 191

că $\triangle ABD \sim \triangle ACD$, deci $\sphericalangle A = \sphericalangle B + \sphericalangle C$ și din $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$, rezultă $\sphericalangle A = 90°$. **548.** Se va observa că AD este tangentă cercului circumscris lui ABC și că simetricul lui H în raport cu BC este situat pe cercul circumscris (probl. 231). **549.** AA' întîlnește

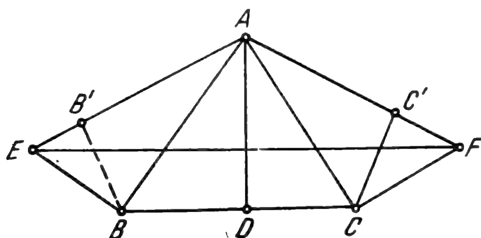


Fig. 192

cercul circumscris triunghiului ABC în D. Avem $\overline{BA'} \cdot \overline{A'C} = \overline{AA'} \cdot \overline{A'D}$, dar $\overline{A'D} = \overline{A'H}$ (probl. 231). **550.** Se duce din A perpendiculara pe (D) care intersectează în P cercul cu centru în M (fig. 191). Avem $\overline{OP}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{OM}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - \overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AN}^2 = $ const. P este deci fix. De asemenea și P'. **551.** a) Din triunghiurile dreptunghice ABE și ACF (fig. 192), rezultă $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$, $\overline{AF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{FC}^2$. Se înlocuiesc $\overline{AB}^2$ și $\overline{AC}^2$ din triunghiurile ABD și ADC și se obține $\overline{AE} = \overline{AF}$. b) Din aceleași triunghiuri se obține $\overline{AB'} = \overline{AB}^2/\overline{AE}$, $\overline{AC'} = \overline{AC}^2/\overline{AF}$. **552.** Fie EF antiparalelă cu

$\overline{BC}$, deci $\triangle AEF \sim \triangle ABC$; $\overline{EF}=(\overline{AF}\cdot\overline{BC})/\overline{AB}$. Din $\triangle ADC$ avem $\overline{AD}^2=\overline{AF}\cdot\overline{AC}$; $\overline{AF}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}}$, deci $\overline{EF}=\frac{\overline{AD}^2\cdot\overline{BC}^2}{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}=\frac{4S^2}{abc}$; dar $abc=4RS$, deci $\overline{EF}=\frac{S}{R}=p'$ (probl. 735). *Altă soluție.* Fie B' și C' picioarele înălțimilor din B, C și E', F' simetricele lui D față de E și F. Deoarece $B'F'$ este simetrică cu $B'D$, rezultă că $\overline{B'F'}=\overline{B'D}$ și $\sphericalangle F'B'F=\sphericalangle DB'C=\sphericalangle AB'C'$, deci $\overline{C'B'}$ și $\overline{B'F'}$ sînt în prelungire. La fel se arată că $\overline{C'E'}=\overline{C'D}$ și că $\overline{C'E'}$ și $\overline{C'B'}$ sînt în prelungire. Rezultă $\overline{EF}=\overline{E'F'}/2=(\overline{C'D}+\overline{C'B'}+\overline{B'D})/2=p'$. **553.** Se observă că $\overline{OM}:\overline{OA}=\overline{OA}:\overline{OM'}=\overline{AM}:\overline{AM'}=\overline{BM}:\overline{BM'}=\overline{CM}:\overline{CM'}$, de unde $\overline{MA}^2:\overline{M'A}^2=\overline{MB}\cdot\overline{MC}:\overline{M'B}\cdot\overline{M'C}$. **554.** Se observă că $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=\overline{OB}\cdot\overline{OC}=\overline{AO}^2$. Se deduce de aici $\overline{OM}:\overline{OA}=\overline{OA}:\overline{OM'}=\overline{MA}:\overline{M'A}$ sau $\overline{OM}:\overline{OM'}=\overline{MA}^2:\overline{M'A}^2$; apoi $\overline{OM}:\overline{OC}=\overline{OB}:\overline{OM'}=\overline{MB}:\overline{M'C}$, $\overline{OM}:\overline{OB}=\overline{OC}:\overline{OM'}=\overline{MC}:\overline{M'B}$, de unde $\overline{OM}:\overline{OM'}=\overline{MB}\cdot\overline{MC}:\overline{M'B'}\cdot\overline{M'C}=\overline{MA}^2:\overline{M'A}^2$. **555.** Triunghiurile $O'AB$, $O'AC$ fiind asemenea, avem $\overline{O'A}^2=\overline{O'B}\cdot\overline{O'C}$. Deci punctele B și C sînt inverse în raport cu cercul cu centrul în O și trecînd prin A. Problema se reduce la cea precedentă. **556.** $\overline{AB_1}=\overline{BA_1}$ (fig. 193); $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{BC}\cdot\overline{BA_1}$, $\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+2\overline{AD}\cdot\overline{AB_1}$. De unde, prin adunare, rezultă proprietatea. **557.** Fie E, F mijloacele diagonalelor $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. Se va aplica teorema medianei triunghiurilor ABC, ADC, BED. Dacă $EF=0$, găsim relația din problema 556. **558.** Se aplică raționamentele din problema precedentă, ținînd seama că segmentul care unește mijloacele diagonalelor este egal cu semidiferența bazelor. **559.** Se aplică teorema medianei triunghiurilor PBC și PAD (fig. 194). Va rezulta $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$. **560.** Fie M și N mijloacele diagonalelor (fig. 195). După problema 557, $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2+4\overline{MN}^2$, deci $\overline{MN}=$ const. M fiind fix, N descrie un cerc. Fie $MO \parallel AC$, $OA \parallel MN$, $MO' \parallel AC$, $CO' \parallel MN$. O și O' sînt deci fixe. $\overline{OA}=\overline{O'C}=\overline{MN}$. A și C descriu cercuri egale. **561.** Se aplică relația medianei în cele patru triunghiuri formate de O cu vîrfurile pătratului, din care rezultă expresia cerută. **562.** Se aplică problema precedentă. $\sum\overline{MA}^2=\sum\overline{MR}^2+a^2$, dar $\sum\overline{MR}^2$ se exprimă din triunghiurile MNQ și MRP (fig. 196) și este $2a^2$. **563.** Pe latura $\overline{DC}$ a patrulaterului se construiește un triunghi DCE asemenea cu DAB (fig. 197). $\sphericalangle A+\sphericalangle C=90°$. Egalul

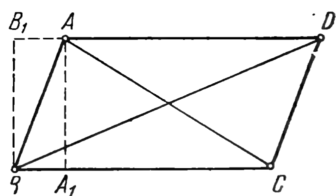


Fig. 193

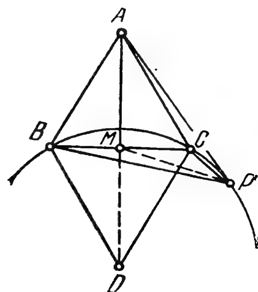


Fig. 194

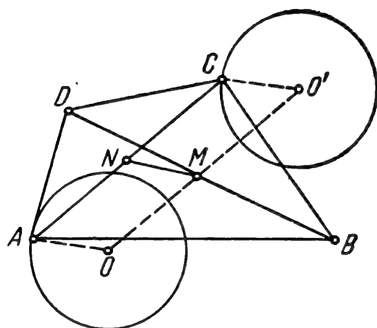


Fig. 195

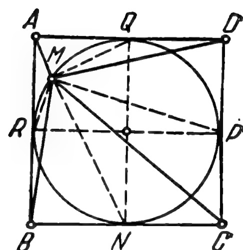


Fig. 196

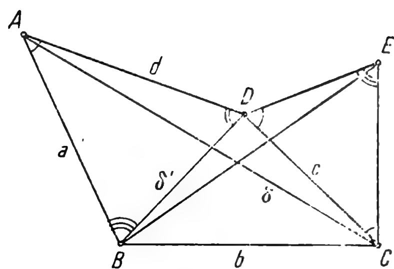


Fig. 197

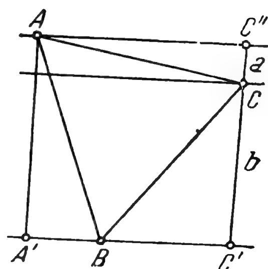


Fig. 198

unghiului A în DCE să aibă vîrful în C. Din asemănarea triunghiurilor rezultă $\overline{DE}: \delta'=\overline{CE}: a=c: d, \overline{DE}=\frac{c\delta'}{d}, \overline{CE}=\frac{c}{d}a$. Triunghiurile DAC și DBE sînt asemenea: $\overline{BE}: \delta=\delta': d. \overline{BE}=\delta\delta'/d$. Triunghiul BCE fiind dreptunghic, $\overline{BE}^2=\overline{BC}^2+\overline{CE}^2$, în care înlocuind $\overline{BE}$ și $\overline{CE}$, rezultă relația din enunț. **564.** Fie E proiecția lui M pe $\overline{AC}$. Avem $\overline{AM}^2=\overline{AE}^2+\overline{ME}^2$, iar din $\triangle CME\sim\triangle CBA, \frac{\overline{ME}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}$, $\overline{ME}=\frac{\overline{MC}\cdot\overline{AB}}{\overline{BC}}$; la fel $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}, \overline{AE}=\frac{\overline{BM}\cdot\overline{AC}}{\overline{BC}}$. Înlocuind în relația de mai sus pe $\overline{AE}$ și $\overline{ME}$, rezultă relația din enunț. **565.** Fie ABC triunghiul echilateral (fig. 198), A', C' proiecțiile vîrfurilor A, C pe paralela ce trece prin B și C'' proiecția lui C pe paralela dusă prin A. Aplicăm teorema lui Pitagora triunghiurilor ACC'', $AA'B$, BCC' și ținem seama că $\overline{AC''}=\overline{A'C'}=\overline{A'B}+\overline{BC'}$. După raționalizarea relației găsite, obținem expresia din enunț. **566.** Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată triunghiurilor ABM, ACM (fig 199), avem $\overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{MB}^2+2\overline{MB}\cdot\overline{DM}$, $\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{MC}^2-2\overline{MC}\cdot\overline{DM}$, D piciorul înălțimii din A. Înmulțim prima relație cu $\overline{MC}$, a doua cu $\overline{MB}$ și adunînd, obținem relația cerută. **567.** Se egalează valorile pătratului catetei $\overline{AA'}$ din triunghiurile dreptunghice $AA'B$, $AA'C$. **568.** Dacă cele trei perpendiculare se întîlnesc într-un punct P, avem $\overline{B\alpha}^2-\overline{C\alpha}^2=\overline{PB}^2-\overline{CP}^2$ (probl. 567) și încă două relații analoge. Adunînd, obținem relația cerută, care este deci necesară. Să considerăm reciproca. Cunoaștem relația probelmei și vrem să dovedim concurența celor trei perpendiculare. Să presupunem că ele nu sînt concurente. Fie P punctul de întîlnire al perpendicularelor în α și β iar γ' proiecția lui P pe $\overline{AB}$. Vom avea $\overline{B\alpha}^2-\overline{C\alpha}^2+\overline{C\beta}^2-\overline{A\beta}^2+\overline{A\gamma'}^2-\overline{B\gamma'}^2=0$ și cum $\overline{B\alpha}^2-\overline{C\alpha}^2+\overline{C\beta}^2-\overline{A\beta}^2+\overline{A\gamma}^2-\overline{B\gamma}^2=0$, deducem $\overline{A\gamma'}^2-\overline{B\gamma'}^2=\overline{A\gamma}^2-\overline{B\gamma}^2$ sau $(\overline{A\gamma'}-\overline{B\gamma'})\cdot(\overline{A\gamma'}+\overline{B\gamma'})=(\overline{A\gamma}-\overline{B\gamma})\cdot(\overline{A\gamma}+\overline{B\gamma})$. Segmentele luate pe laturile triunghiului într-un sens fiind considerate pozitive, iar celelalte, luate în sens contrar, negative, vom avea $\overline{A\gamma'}-\overline{B\gamma'}=\overline{A\gamma'}+\overline{\gamma'B}=\overline{AB}$, $\overline{A\gamma'}+\overline{B\gamma'}=\overline{AB}+2\overline{B\gamma'}$, $\overline{A\gamma}-\overline{B\gamma}=\overline{AB}$, $\overline{A\gamma}+\overline{B\gamma}=\overline{AB}+2\overline{B\gamma}$. Deducem

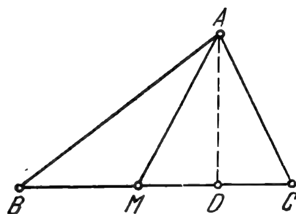


Fig. 199

$\overline{B\gamma}=\overline{B\gamma'}$ și punctele γ, γ' se confundă. **569.** Cu ajutorul problemei precedente se arată că relația este îndeplinită, α, β, γ fiind picioarele înălțimilor triunghiului ABC. **570.** Se va observa că $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=$ $=2\overline{AA'}^2+2\overline{A'B}^2=\frac{9}{2}\overline{GA}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2$, A' fiind mijlocul lui $\overline{BC}$. Din formula precedentă și din alte două analoge se deduce cea din enunț. **571.** Fie A' mijlocul lui $\overline{BC}$, $\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=2\overline{M'A}^2+$ $+2\overline{M'B}^2$; se va aplica relația lui Stewart triunghiului MAA' și punctului G, $\overline{MA'}^2\cdot\overline{GA}+\overline{MA}^2\cdot\overline{G'A}=\overline{MG}^2\cdot\overline{AA'}+\overline{GA}\cdot\overline{GA'}\cdot\overline{AA'}$, de unde $2\overline{MA'}^2+\overline{MA}^2=3\overline{MG}^2+\frac{3}{2}\overline{GA}^2$. Înlocuind pe $2\overline{MA'}^2$ în prima formulă, se deduce $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=3\overline{MG}^2+\frac{3}{2}\overline{GA}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2$, pe care scriind-o și pentru vîrfurile B, C, adunînd și ținînd seama de relația din problema 566, se va obține relația cerută. **572.** În relația precedentă se va pune O în locul lui M, observînd că $\overline{OA}=\overline{OB}=$ $=\overline{OC}=R$ și ținem seama de problema 639. **573.** Se va observa că $\overline{HO}=3\overline{GO}$ (probl. 440). **574.** Fie G_1, G_2, G_3, punctele de întîlnire a medianelor triunghiurilor $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. După problema 571 avem $\overline{MA}_1^2+\overline{MB}_1^2+\overline{MC}_1^2=3\overline{MG}_1^2+K_1^2$ etc. M este deci definit de $\overline{MG}_1^2+K_1^2=\overline{MG}_2^2+K_2^2=\overline{MG}_3^2+K_3^2$. M se găsește la intersecția a două drepte perpendiculare pe G_1G_2 și G_1G_3 (G.M. XIII). **575.** Aplicînd teorema medianei triunghiurilor MAC, MBD se deduce $\overline{MA}^4+\overline{MB}^4+\overline{MC}^4+\overline{MD}^4=8\overline{MO}^4+8\overline{MO}^2\cdot\overline{AB}^2+8\overline{AO}^4-2(\overline{MA}^2\cdot$ $\cdot\overline{MC}^2+\overline{MB}^2\cdot\overline{MD}^2)$. Fie E și F proiecțiile lui M pe $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$. Avem $\overline{MB}^2=\overline{MO}^2+\overline{OA}^2-2\overline{AO}\cdot\overline{EO}$; $\overline{MC}^2=\overline{MO}^2+\overline{AO}^2+2\overline{AO}\cdot\overline{EO}$. Deci $\overline{MA}^2\cdot\overline{MC}^2=(\overline{MO}^2+\overline{AO}^2)^2-4\overline{AO}^2\cdot\overline{EO}^2$ și analog $\overline{MB}^2\cdot\overline{MD}^2=$ $=(\overline{MO}^2+\overline{AO}^2)^2-4\overline{AO}^2\cdot\overline{FO}^2$; $\overline{MA}^2\cdot\overline{MC}^2+\overline{MB}^2\cdot\overline{MD}^2=2\overline{MO}^4+$ $+2\overline{AO}^4$. Înlocuind în prima relație, se obține relația căutată (G.M. VII). **576.** Fie α, β, γ proiecțiile punctelor A', B', C' pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ (fig. 200). Avem $\overline{B\alpha}^2-\overline{C\alpha}^2=\overline{BA'}^2-\overline{CA'}^2$ și două relații analoge care se adună. Proprietatea rezultă din problema 569, observînd că $\overline{AB'}=\overline{BA'}$, $\overline{BC'}=\overline{CB'}$, $\overline{CA'}=\overline{AC'}$. **577.** Fie α, β, γ proiecțiile punctelor A', B', C' respectiv pe $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Avem $\overline{B\alpha}^2=\overline{A'B}^2-\overline{A'\alpha}^2=\overline{A'B'}^2+\overline{BB'}^2-\overline{A'\alpha}^2$. Analog avem $\overline{C\alpha}^2=\overline{A'C'}^2+\overline{CC'}^2-\overline{A'\alpha}^2$ și deci $\overline{B\alpha}^2-\overline{C\alpha}^2=\overline{A'B'}^2-\overline{A'C'}^2+$ $+\overline{BB'}^2-\overline{CC'}^2$. Se aplică problema 568. **578.** Fie α, β, γ, α', β', γ' proiecțiile punctelor A, B, C, A', B', C', respectiv pe dreptele $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, BC, CA, AB. Trebuie dovedit că dacă avem

relația $\overline{B'\alpha}^2 - \overline{C'\alpha}^2 + \overline{C'\beta}^2 - \overline{A'\beta}^2 + \overline{A'\gamma}^2 - \overline{B'\gamma}^2 = 0$, avem și $\overline{B\alpha'}^2 - \overline{C\alpha'}^2 + \overline{C\beta'}^2 - \overline{A\beta'}^2 + \overline{A\gamma'}^2 - \overline{B\gamma'}^2 = 0$. Se va arăta că primele părți ale celor două egalități sînt egale cu $\overline{B'A}^2 - \overline{C'A}^2 + \overline{C'B}^2 - \overline{A'B}^2 + \overline{A'C}^2 - \overline{B'C}^2$. **579.** Perpendicularele coborîte din I pe $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ întîlnesc respectiv $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$ în T_1, T_2, T_3. Triunghiurile ABC, $T_1T_2T_3$ sînt prin construcție ortologice (probl. 578), iar dreptele A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b sînt

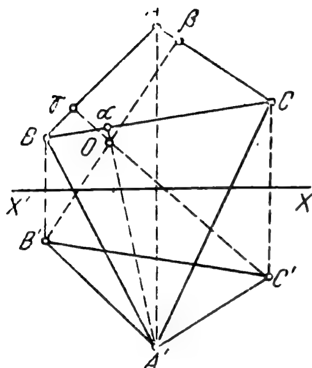


Fig. 200

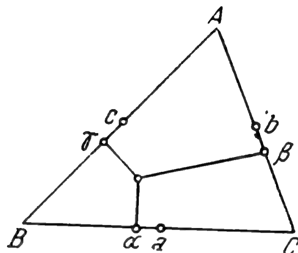


Fig. 201

paralele cu laturile triunghiului $T_1T_2T_3$. **580.** $\overline{B\alpha}^2 - \overline{C\alpha}^2 = (\overline{B\alpha} + \overline{C\alpha}) \cdot (\overline{B\alpha} - \overline{C\alpha})$, dar $\overline{B\alpha} - \overline{C\alpha} = \overline{B\alpha} + \overline{\alpha C} = \overline{BC}$, $\overline{B\alpha} + \overline{C\alpha} = -(\overline{\alpha B} + \overline{\alpha C}) = -2\overline{\alpha a} = 2\overline{a\alpha}$. Deci $\overline{B\alpha}^2 - \overline{C\alpha}^2 = 2\overline{a\alpha}\,\overline{BC}$ (fig. 201). **581.** Fie α_1, β_1, γ_1 mijloacele segmentelor $\overline{\alpha\alpha'}$, $\overline{\beta\beta'}$, $\overline{\gamma\gamma'}$; a, b, c mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Avem $\overline{a\alpha_1} \cdot \overline{BC} + \overline{b\beta_1} \cdot \overline{CA} + \overline{c\gamma_1} \cdot \overline{AB} = 0$ (probl. 580). căci perpendicularele în α_1, β_1, γ_1 pe laturi se întîlnesc în centrul cercului $\alpha\beta\gamma$ și prin ipoteză $a\alpha \cdot \overline{BC} + \overline{b\beta} \cdot \overline{CA} + \overline{C\gamma} \cdot \overline{AB} = 0$. Scădem parte cu parte și obținem $a\alpha' \cdot \overline{BC} + \overline{b\beta'} \cdot \overline{CA} + \overline{c\gamma'} \cdot \overline{AB} = 0$. **582.** Se duce $CQ \| AB$, $BP \| AC$; P fiind pe AM iar Q pe AN. Din asemănarea triunghiurilor BMP, AMC; ABN, NCQ; ABP, ACQ se deduce relația cerută. **583.** Se aplică teorema precedentă. **584.** Triunghiurile APP', AQQ''; APP'', AQQ' (fig. 202) fiind asemenea: $\overline{PP'} : \overline{QQ''} = \overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{PP''} : \overline{QQ'}$ sau $\overline{PP'} \cdot \overline{QQ'} = \overline{PP''} \cdot \overline{QQ''}$. **585.** Se observă că patrulaterele $AP'PP''$, $AQ'QQ''$ sînt inscriptibile și că triunghiurile $PP'P''$, $QQ'Q''$ sînt asemenea. **586.** Simetricele dreptelor AM, BM se intersectează în N. Se proiectează M și N în M', M'', M''' și N', N'', N''' pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. După problema 579 avem $\overline{MM''} \cdot \overline{NN''} = \overline{MM'''} \cdot \overline{NN'''} = \overline{MM'} \cdot \overline{NN'}$. Re-

zultă, după problema 580, că CN și CM sînt egal înclinate pe bisectoarea unghiului C. **587.** Se va aplica problema precedentă, considerînd dreptele AM, BM, CM ca mediane. **588.** Fie P un punct al cercului circumscris triunghiului ABC (fig. 203), Q, R, S respectiv proiecțiile acestui punct pe laturile CA, AB, BC. Izogonalele cevienelor punctului P sînt paralele (probl. 262). Fie AD izogonala cevienei AP iar B' proiecția lui B pe AD. Triunghiurile asemenea QSP, ABP ne dau $\overline{QS}:\overline{SP}=\overline{AB}:\overline{PB}$, iar triunghiurile asemenea ABB' și BPS ne dau $\overline{BB'}:\overline{SP}=\overline{AB}:\overline{PB}$. Deducem $\overline{BB'}=\overline{QS}$ (G.M. XXIX). **589.** Locul mijloacelor paralelelor la baza $\overline{BC}$ este

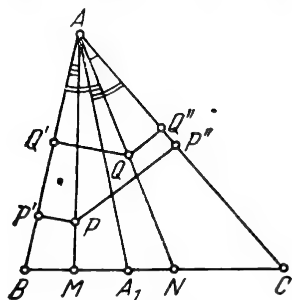


Fig. 202

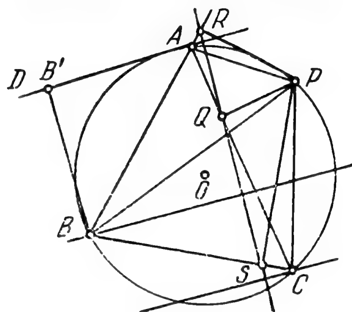


Fig. 203

mediana AG. Printr-o rotație în jurul bisectoarei se deduce prima propoziție enunțată. Fie S punctul în care AK întîlnește latura $\overline{BC}$, iar MSN, SE, SD antiparalelele la laturile corespunzătoare unghiurilor A, B, C duse prin S. Triunghiurile DSM, ESN sînt isoscele. Deci $\overline{SD}=\overline{SM}$, $\overline{SE}=\overline{SN}$. Dar $\overline{SM}=\overline{SN}$. **590.** Fie A', B', C' punctele de diviziune astfel ca $\overline{AA'}:\overline{AK}=\overline{BB'}:\overline{BK}=\overline{CC'}:\overline{CK}$; K_bKK_a, $K_aKK'_c$ antiparalelele la laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ duse prin K; $A_kC'B_k$, $A'_kB'C'_k$ paralelele duse prin B', C' la cele dintîi. Avem $\overline{A_kB_k}:\overline{K_aK_b}=\overline{BB'}:\overline{BK}$ și $\overline{A'_kC'_k}:\overline{K'_aK'_c}=\overline{CC'}:\overline{CK}$. Dar $\overline{K_aK_b}=\overline{K'_aK'_c}$ (probl. 589). Deci și $\overline{A_kB_k}=\overline{A'_kC'_k}$ și antiparalelele duse prin A', B', C' fiind egale, ele întîlnesc laturile în puncte conciclice (probl. 229). **591.** Figura AB_cKC_b este un paralelogram. Dreptele B_cC_b și AK se împart în părți egale. Deci (probl. 584, 585) dreptele B_cC_b, C_aA_c, A_bB_a sînt antiparalele egale și cele șase puncte sînt conciclice (probl. 229). Apoi avem $\overline{AO}\perp\overline{B_cC_b}$. Perpendiculara pe mijlocul lui $\overline{B_cC_b}$ trece prin mijlocul lui $\overline{OK}$. **592.** Se va arăta că antiparalelele $\overline{A_bA_c}$, $\overline{B_cB_a}$, $\overline{C_aC_b}$ (fig. 204) sînt egale (probl. 229). Fie M punctul diametral opus lui C în cercul circumscris triunghiului ABC. Patrulaterele inscriptibile $AMBC$, $CC_aC''C_b$ sînt asemenea,

căci sînt compuse din triunghiuri dreptunghice, respectiv asemenea CAM, $CC''C_a$ și CBM, $CC''C_b$ în care unghiurile din C sînt respectiv egale, înălțimea $\overline{CH}$ și diametrul $\overline{CO}$ fiind izogonale. Deci $\overline{C_aC_b}:\overline{CC''}=\overline{AB}:\overline{CM}=\overline{AB}:(\overline{2R})$, R fiind raza cercului ABC. Analog $\overline{B_cB_a}:\overline{BB''}=AC:(2R)$. Din asemănarea triunghiurilor ABB', ACC' deducem $\overline{AB}\cdot\overline{CC'}=\overline{AC}\cdot\overline{BB'}$. Se deduce $\overline{B_cB_a}=\overline{C_aC_b}$. **593.** Se deduce din problema precedentă cînd perechile de puncte (A', A''), (B', B''), (C', C'') se confundă. **594.** Dreptele AM, AM_1 sînt respectiv perpendiculare pe Y_1Z_1, YZ. Patrulaterul YZY_1Z_1 este înscris într-un cerc cu centrul în ω. **595.** Observăm că $\overline{MA_1^2}=\overline{XM^2}+\overline{XA_1^2}=\overline{XM^2}+\overline{XM_1^2}$ și teorema medianei aplicată triunghiului XMM_1 ne dă $\overline{XM^2}+\overline{XM_1^2}=2\overline{X\omega^2}+2(\overline{MM_1}:2)^2$. Deci $\overline{MA_1^2}=2\overline{X\omega^2}+\overline{MM_1^2}:2=\text{const}$ (G.M. XXXIII). **596.** Fie P_1 simetricul lui P în raport cu bisectoarea AI. Punctele P și P_1 sînt puncte inverse în triunghiul ABC, căci P_1 este situat pe cercul BIC și $\sphericalangle PBI=\sphericalangle P_1BI$ și $\sphericalangle PCI=\sphericalangle P_1CI$. Se va ține apoi seama de problema 589 (G.M. XXXI). **597.** Fie $a+r$, a, $a-r$ cele trei laturi. Teorema lui Pitagora dă $(a+r)^2=a^2+(a-r)^2$. Laturile sînt $\frac{5}{4}a$, a, $\frac{3}{4}a$. Ele sînt proporționale cu ale triunghiului cu laturile 5, 4, 3. (G. M. XXIX). **598.** Fie R intersecția dreptelor AN și DB, $\triangle DAR\sim\triangle AMC$ căci au unghiurile egale. Deci $\overline{CM}:\overline{DR}=\overline{AC}:\overline{AD}$. Se arată apoi că triunghiurile DRN și BDP au unghiurile egale și sînt deci asemenea. Rezultă $\overline{BP}:\overline{DR}=\overline{DR}:\overline{DN}$. Deducem $\overline{DR}\cdot\overline{AC}=\overline{CM}\cdot\overline{AD}=\overline{DN}\cdot\overline{BP}$, căci $\overline{AC}=\overline{BD}$ (G. M. XXXII). **599.** Fie O mijlocul lui $\overline{AB}$, N proiecția lui M pe $\overline{AB}$. Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată triunghiurilor AMO, BMO, se deduce $\overline{MA}^2-\overline{MB}^2=2\overline{AB}\cdot\overline{NO}=K^2$; $\overline{NO}=\frac{K^2}{2\overline{AB}}$, deci $NO=\text{const}$.

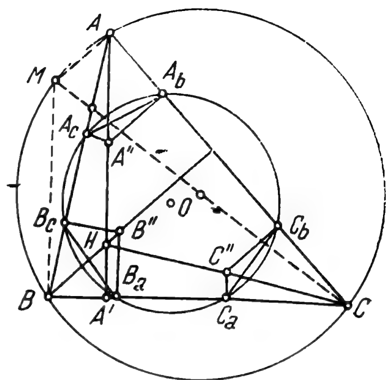


Fig. 204

Locul este perpendiculara ridicată în punctul fix N pe $\overline{AB}$. **600.** Fie P și Q mijloacele segmentelor egale $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ (fig. 205). Aplicînd teorema medianei triunghiurilor MAB și MCD și, ținînd seama de

condiția din enunț, se deduce că $\overline{MP}=\overline{MQ}$, deci locul este mediatoarea segmentului PQ. **601.** Fie M, M' două puncte luate pe $\overline{AC}$ și E, E'; F, F'; G, G'; H, H' proiecțiile lor pe $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ și $\overline{DA}$. Avem evident $\overline{ME} : \overline{MH}=\overline{M'E'} : \overline{M'H'}$ și $\overline{MF} : \overline{MG}=\overline{M'F'} : \overline{M'G'}$ și deci dacă $\overline{ME} : \overline{MH}=\overline{MF} : \overline{MG}$, atunci și $\overline{M'E'} : \overline{M'H'}=\overline{M'F'} : \overline{M'G'}$. Observăm că proprietatea are loc și pentru punctul de întîlnire a diagonalelor; se deduce că proprietatea are loc și pentru punctele celeilalte diagonale (G.M. XIII). **602.** Fie A_1, B_1, C_1; A_1', B_1', C_1' mijloacele laturilor triunghiurilor ABC, $A'B'C'$ (fig. 206). Se va observa că $C_1'B_1' \| B'C'$ și deci B_1', C_1', A_1' sînt pe aceeași dreaptă. Ducem $A'M \| AA''$ (M pe $\overline{BC}$) și $B'N \| BB''$ (N pe $\overline{AC}$). Se va observa că $\overline{AN}=\overline{B''C}$ și $\overline{BA''}=\overline{CM}$ și se deduce că $\overline{BA''} : \overline{CA}=$ $=\overline{MC} : \overline{A''C} = \overline{A'C} : \overline{B'C} =$ $= \overline{B''C} : \overline{NC} = \overline{CB''} : \overline{AB''}$ (G.M. XIV).

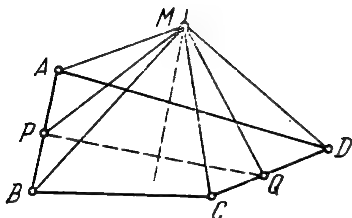


Fig. 205

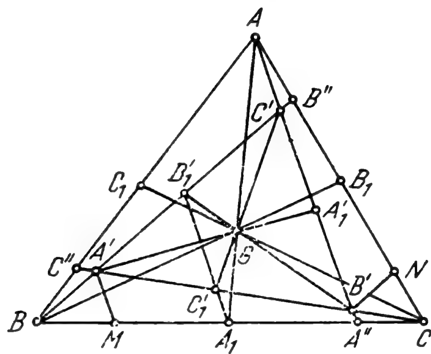


Fig. 206

XI. **603.** Fie $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ cele două coarde (fig. 207), O centrul cercului, R raza, M și N mijloacele coardelor, iar P intersecția lor. Avem $\overline{MA}^2=\overline{OA}^2-\overline{OM}^2$, $\overline{NC}^2=\overline{OC}^2-\overline{ON}^2$; de aici rezultă $\overline{MA}^2+$ $+\overline{NC}^2=2R^2-\overline{OP}^2$; $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=4(2R^2-\overline{OP}^2)$. **604.** Se folosește problema precedentă, unde P rămîne la distanță constantă de O. **605.** În problema 603 s-a demonstrat că $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=4(2R^2-\overline{OP}^2)$, dar $\overline{AB}\cdot\overline{CD} \leqslant \frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{CD}^2)$, deci $\overline{AB}\cdot\overline{CD}\leqslant 2(2R^2-\overline{OP}^2)$.

606. Din triunghiurile dreptunghice ONO_1, O_1MO avem $\overline{O_1M}^2=$ $=\overline{OO_1}^2-R^2$; iar din triunghiurile OAB, O_1BA, $\overline{O_1A}^2=\overline{AB}^2+R_1^2$; $\overline{OB}^2=\overline{AB}^2+R^2$. Din acestea rezultă $\overline{O_1A}^2-\overline{OB}^2=\overline{O_1M}^2-\overline{ON}^2$. **607.** $d^2=4R_1R_2$; $d^2=D_1\cdot D_2$. **608.** Se reduce la 607. **609.** Fie (O), (O_1) cele două cercuri de raze R și R_1 (fig. 208), iar TT_1 tangenta comună; $\overline{TT_1}^2=\overline{OC}^2=2RR_1$, dar $RR_1=\overline{OO_1}\cdot\frac{AB}{2}$ etc. **610.** $\overline{OM}=$

$=\overline{ON}=d$ (fig. 209). $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=R^2-d^2=\overline{NA}\cdot\overline{NC}$. Avem $\frac{1}{\overline{MB}^2}+$ $+\frac{1}{\overline{NC}^2}=\frac{\overline{MA}^2+\overline{NA}^2}{(R^2-d^2)^2}$. Din triunghiurile OAM și OAN avem $AM^2=$ $=\overline{AO}^2+\overline{OM}^2+2\overline{MO}\cdot\overline{OP}$; $\overline{AN}^2=\overline{ON}^2+\overline{AO}^2-2\overline{NO}\cdot\overline{OP}$. Adunăm ultimele egalități: $\overline{AM}^2+\overline{AN}^2=2(R^2+d^2)$, deci $\frac{1}{\overline{MB}^2}+\frac{1}{\overline{NC}^2}=$ $=\frac{2(R^2+d^2)}{(R^2-d^2)^2}=$ const. **611.** Primul arc intersectează pe AB în R și Q (fig. 210); $\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=(\overline{AB}-\overline{AC})\cdot(\overline{AB}+\overline{AC})=\overline{BR}\cdot\overline{BQ}=$ $=\overline{BC}\cdot\overline{BC'}$. În același mod pentru celelalte două. **612.** În formula $\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BC}\cdot\overline{BC'}$ din problema precedentă se va observa că în cazul de față $\overline{BC'}=2\overline{MP}$. Din aceeași formulă se pot deduce teoremele relative la pătratul laturii care se opune unui unghi ascuțit sau obtuz, înlocuind pe $\overline{BC'}$ prin $\overline{BC}\pm2\overline{CP}$, după cum $\sphericalangle C$ este obtuz sau ascuțit. **613.** Fie D piciorul bisectoarei $\overline{AD}$, $\overline{AD}=$ $=\overline{DB}$, fie M mijlocul laturii $\overline{AB}$, $\overline{DM}\perp\overline{AB}$. Se va observa că din $\triangle BMD\sim\triangle BAA'$, rezultă $\overline{BA}^2=2\overline{BA'}\cdot\overline{BD}$ și că din $\triangle CAD\sim$ $\sim\triangle CAB$, $\overline{AC}^2=\overline{CB}\cdot\overline{CD}$, deci $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=2\overline{BA'}\cdot\overline{BD}:\overline{CB}\cdot\overline{CD}=$ $=(2\overline{BA'}:\overline{CB})\cdot(\overline{BD}:\overline{CD})$; însă $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$, se obține deci $\overline{AB}:\overline{AC}=2\overline{BA'}:\overline{DB}=$ const. Punctul A se găsește la intersecția perpendicularei în A' pe $\overline{BC}$ cu cercul, loc al punctelor P, așa că $\overline{PB}:\overline{PC}=2\overline{BA'}:\overline{CB}$. **614.** Fie $ABCD$ patrulaterul (fig. 211); $\overline{AC}=\delta$, $\overline{BD}=\delta'$, Ducem, în triunghiul ABD, $\overline{AE}$ așa că $\sphericalangle DAE=\sphericalangle BAC$; $\triangle ABC\sim\triangle ADE$; $\triangle ABE\sim\triangle ADC$. Deducem $b:\overline{ED}=\overline{AC}:d$, $a:\overline{AC}=\overline{BE}:c$, $ac=\overline{AC}\cdot\overline{BE}$, $bd=\overline{AC}\cdot\overline{ED}$; adunînd, $ac+bd=\delta\cdot\delta'$. **615.** Problema 612 arată că proiecția lui M pe $\overline{AB}$ este un punct fix. Locul este deci o dreaptă perpendiculară pe $\overline{AB}$. **616.** $ABMN$ este patrulater inscriptibil. Fie P intersecția dreptelor AB, MN. Avem $\overline{PM}\cdot\overline{PN}=\overline{PA}\cdot\overline{PB}=K$ (const) și $\overline{PM}-\overline{PN}=l$ (dat). Problema revine la probl. 838 (R.M.F. 1950). **617.** Fie a, b razele cercurilor (O'), (O'') (fig. 212), A,B,C,D,E punctele de contact ale cercurilor (O'), (O_1), (O), (O_2), (O'') cu o latură a unghiului. Avem $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$, $\overline{CE}=\overline{CD}+\overline{DE}$ sau $2\sqrt{ar}+2\sqrt{Rr}=$ $=2\sqrt{aR}$, $2\sqrt{br'}+2\sqrt{Rr'}=2\sqrt{bR}$, de unde $\sqrt{Rr}=\sqrt{a}(\sqrt{R}-\sqrt{r})$, $\sqrt{Rr'}=\sqrt{b}\,(\sqrt{R}-\sqrt{r'})$. Înmulțind ultimele relații și ținînd seama că $\sqrt{ab}=R$, obținem $\sqrt{r}+\sqrt{r'}=\sqrt{R}$. (R.M.F. 1952, 2).

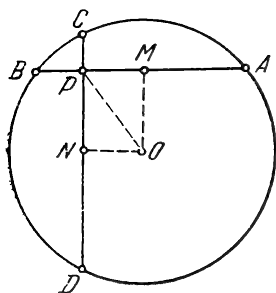


Fig. 207

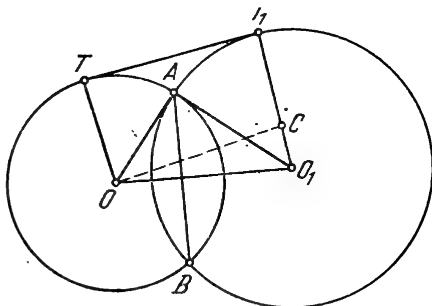


Fig. 208

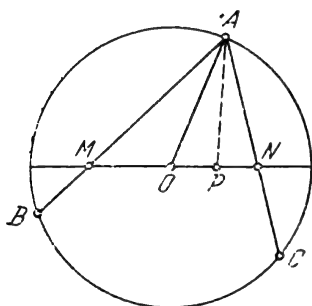


Fig. 209

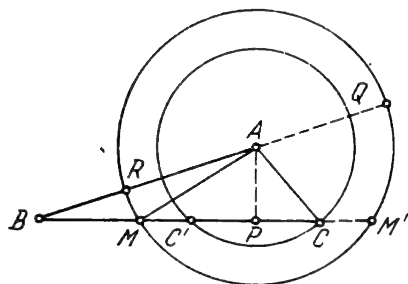


Fig. 210

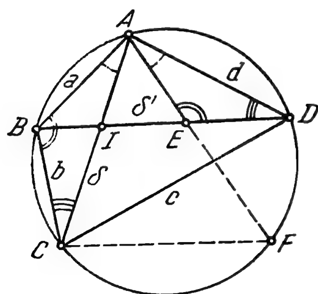


Fig. 211

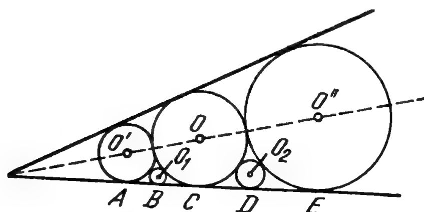


Fig. 212

618. Q mijlocul lui $\overline{MN}$. a) MPN este triunghi dreptunghic, iar $MPNI$ dreptunghi. Locul lui I este semicercul de diametru $\overline{AB}$. b) Q se află pe tangenta comună în P, deci este diagonala dreptunghiului și trece prin I. Se intersectează semicercul de diametru $\overline{AB}$ cu o paralelă la AB, la distanța l. c) $l \leqslant a/2$. **619.** Fie O mijlocul lui $\overline{CD}$, $\overline{OP} \perp \overline{AB}$, $\overline{OQ} \perp \overline{CD}$, P și Q fiind pe $\overline{AB}$, $\overline{AE} \| \overline{CD}$, E pe $\overline{BD}$. Triunghiurile OPQ și ABE sînt asemenea și deoarece $\overline{OQ} = \frac{1}{2}(R + r)$, rezultă $\overline{OP} = \frac{R+r}{d} \cdot \frac{\overline{CD}}{2}$. Însă $\frac{R+r}{d} < 1$, deci $\overline{AB}$ intersectează cercul (O). Pentru ca (O) să fie tangent la $\overline{AB}$ trebuie ca $\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{CD}$, deci $d = R + r$, iar (A), (B) tangente. b) Puterile lui A și B față de O. **620.** a) Ducem cercul circumscris și prelungim $\overline{AM}$ pînă intersectează cercul în N. Avem $\overline{AM} \cdot \overline{MN} = \overline{BM} \cdot \overline{MC}$, iar din enunț $\overline{AM^2} = \overline{BM} \cdot \overline{MC}$, deci trebuie ca $\overline{MN} = \overline{AM}$. Rezultă următoarea construcție: se ia M arbitrar pe $\overline{BC}$ și se prelungește cu $\overline{MN} = \overline{AM}$. Locul lui N este o paralelă la $\overline{BC}$ care intersectează cercul în N_1 și N_2. Dreptele AN_1 și AN_2 intersectează pe BC în M_1 și M_2 care sînt punctele cerute. Deoarece arc BN_1 = arc CN_2, rezultă $\sphericalangle BAN_1 = \sphericalangle CAN_2$; dreptele AM_1 și AM_2 sînt izogonale. b) Fie F mijlocul lui $\overline{N_1N_2}$. Avem $\overline{FM_2} \# \overline{M_1A}$ și $\overline{FD} \# \overline{AE}$, deci triunghiul FM_2D este egal cu triunghiul AM_1E, de unde $\overline{M_1E} = \overline{M_2D}$ sau $\overline{M_1D} = \overline{M_2E}$ (C.G.M. 1946). **621.** Deoarece AM_1 și AM_2 sînt izogonale, ca M_1 și M_2 să se confunde trebuie ca AM să fie bisectoare. Alegem vîrful A pe un cerc (O), apoi un punct N tot pe cerc. Prin mijlocul M al lui $\overline{AN}$ ducem o perpendiculară pe diametrul $\overline{ON}$ care intersectează cercul, în B, C. Triunghiul ABC satisface enunțul. a) Relația lui Stewart dă $\overline{AM^2} = \frac{bc}{2}$, dar $\overline{AM^2} = \overline{BM} \cdot \overline{MC} = \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$, de unde rezultă relația cerută. b) Avem $r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{a(\sqrt{2}+1)}$; $h_a = \frac{2S}{a}$; $r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{2S}{a(\sqrt{2}-1)}$. Se verifică imediat că $h_a^2 = rr_a$ (C.G.M. 1946).

622. Dreapta ortocentrelor unui patrulater complet este axa radicală a cercurilor descrise pe diagonalele patrulaterului ca diametre. Notînd cu Ω_{uv} cercul descris pe segmentul $\overline{UV}$ ca diametru, atunci (Δ_1) este axa radicală a cercurilor Ω_{ac} și Ω_{bd}, analog (Δ_2) a cercurilor Ω_{ad} și Ω_{bc}, (Δ_3) a cercurilor Ω_{ab}, Ω_{cd}. Dacă T este

punctul comun dreptelor (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), el are puterea egală față de fiecare din perechile de cercuri. Se știe că dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse și mijloacele diagonalelor sînt concurente într-un punct G. Fie O simetricul lui T față de G (fig. 213). Scriind că

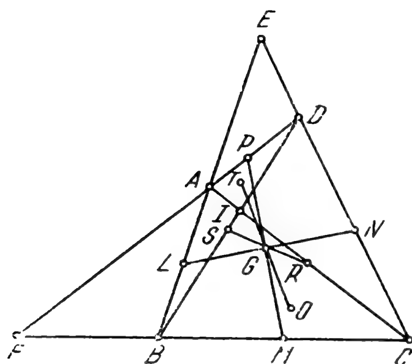


Fig. 213

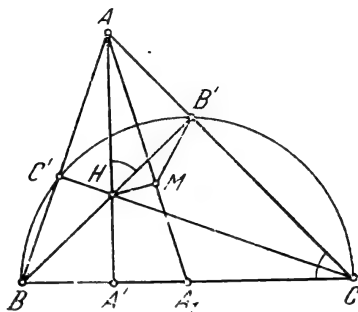


Fig. 214

puterile lui T față de Ω_{ad}, Ω_{bc} sînt egale, $\overline{TM}^2 - \frac{\overline{BC}^2}{4} = \overline{TP}^2 - \frac{\overline{AD}^2}{4}$. Dar $\overline{TM} = \overline{OP}$ și $\overline{TP} = \overline{OM}$, încît avem (1) $4\overline{OP}^2 - \overline{BC}^2 = 4\overline{OM}^2 - \overline{AD}^2$, $\overline{OM}$ și $\overline{OP}$ sînt mediane în triunghiurile OBC și OAD. $4\overline{OM}^2 = 2(\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2) - \overline{BC}^2$; $4\overline{OP}^2 = 2(\overline{OA}^2 + \overline{OD}^2) - \overline{AD}^2$. Introduse în (1), avem $\overline{OA}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2$. Analog $\overline{OA}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$ și $\overline{OB}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2$. Scăzînd ultimele trei egalități una din alta, cîte două, se deduce $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$. Așadar, $ABCD$ trebuie să fie inscriptibil. Pornind invers, dacă patrulaterul este inscriptibil, (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3) sînt concurente. (G.M. 1946, 3). **623.** Fie $\overline{BC} = a$; $\overline{AB} = \overline{AC} = b$. Puterea față de cercuri ne dă $\overline{CB_1} = \frac{a}{b}\overline{CM}$; $\overline{BC_1} = \frac{a}{b}\overline{BM}$; $\overline{BC_1} + \overline{CB_1} = \frac{a^2}{b} = \text{const.}$ (R.M.F. 1953, 4).
624. Puterea față de cele două cercuri este egală, deci $\overline{MP}^2 = \overline{MO}^2 - r^2$ sau $\overline{MO}^2 - \overline{MP}^2 = r^2$. O perpendiculară pe $\overline{OP}$.
625. Rezultă $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \text{const}$ dar cum $\overline{BC}$ este constant $\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \text{const}$. B' fiind piciorul perpendicularei din B pe $\overline{AC}$ și M proiecția lui H pe mediana AA_1 (fig. 214), avem $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AA_1}}$, $\overline{AM} \cdot \overline{AA_1} = \overline{AC} \cdot \overline{AB'} = \overline{AA}_1^2 - \frac{a^2}{4}$; $\overline{AM} = \overline{AA_1} -$

$-\dfrac{a^2}{4\overline{AA_1}} = \text{const}$, deci $\overline{A_1M}$ este constant. Locul lui M este un cerc cu centrul în A_1. **626.** Din $\overline{MO^2} - R^2 = \overline{MA^2}$; rezultă $\overline{OM^2} - \overline{MA}^2 = R^2$; locul este o dreaptă perpendiculară pe OA. **627.** Din $\overline{MO^2} - R^2 = \overline{MO'^2} - R'^2$, rezultă $\overline{MO^2} - \overline{MO'^2} = R^2 - R'^2 = \text{const}$. Locul este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor OO'. Această dreaptă se numeşte *axa radicală* a cercurilor (O), (O'). Dacă cercurile sînt concentrice, axa radicală nu mai există (este aruncată la infinit). **628.** a) Fie D, E, F picioarele înălţimilor lui ABC, L mijlocul lui $\overline{AH}$, P al doilea punct comun cercurilor (O_a) şi (O). Cercul (O_a) trece evident prin D, (O_b) prin E şi (O_c) prin F. Puterile lui H faţă de cele trei cercuri sînt egale şi anume: $\overline{HA} \cdot \overline{HD} = \overline{HB} \cdot \overline{HE} = \overline{HC} \cdot \overline{HF}$. b) $\overline{OA'} \# \overline{LH}$, deci OL intersectează pe AA' în O_a. Axa radicală AP a cercurilor (O_a), (O) este perpendiculară pe linia centrelor OO_a, deci $AP \perp A'H$, dar $A'H$ trece prin P. Rezultă că P se află pe cercul (L) de diametru $\overline{AH}$. Axele radicale AP, EF, BC ale cercurilor (O), (L) şi $BCEF$, luate cîte două, se întîlnesc în centrul radical α, deci EF şi AP se întîlnesc pe BC. Rezultă că α, β, γ sînt coliniare, deoarece definesc axa de omologie a triunghiurilor ABC şi DEF (G. M. F. seria A, 1955). **629.** ω fiind centrul unui cerc ce trece prin A şi intersectează ortogonal cercul O (R), rezultă $\overline{O\omega^2} - \overline{\omega A^2} = R^2$. Locul este o dreaptă perpendiculară pe OA. **630.** Fie M, N punctele unde dreptele AB, $A'B'$ intersectează pe (D) şi O, O' centrele cercurilor căutate, O'', O''' centrele cercurilor de diametre $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ (fig. 215). Cercul de centru M cu raza cît tangenta la (O'') intersectează ortogonal cercurile (O), (O'), (O''). La fel cercul cu centrul în N cu raza cît tangenta la O''' intersectează ortogonal cercurile (O), (O'), (O'''). Aceste două cercuri fac parte dintr-un fascicul a cărui axă radicală este linia centrelor OO'. Construcţie: se duc cercurile (M), (N) cu razele cît tangentele la cercurile (O''), (O''') şi se constru-

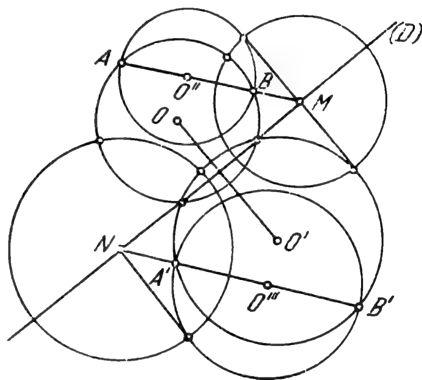


Fig. 215

iește axa radicală a acestor cercuri. Se construiesc mediatoarele segmentelor $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ care se intersectează cu axa radicală în centrele cercurilor. Pentru ca (O), (O') să aibă secanta comună (D) trebuie ca cercurile (M) și (N) să fie exterioare, adică $\overline{MN} \geqslant \sqrt{\overline{AM}\cdot\overline{BM}} + \sqrt{\overline{A'N}\cdot\overline{B'N}}$. **631.** M mijlocul lui $\overline{BC}$ sau $\overline{AD}$, se află pe axa radicală (fig. 216). Dacă ω este mijlocul distanței centrelor, $\omega M \perp ABCD$; de aici rezultă construcția în ambele cazuri. *Altă soluție.* Presupunem problema rezolvată. Dăm cercului (O') o translație pînă cînd centrul vine în ω, astfel ca $O\omega$ să fie perpendiculară pe secantă. ω se află pe cercul de diametru $\overline{OO'}$. Pe de altă parte scriind puterea lui P față de (O) și ω: $\overline{P\omega}^2 - r'^2 = \overline{PO}^2 - r^2$, deci $\overline{P\omega}^2 = \overline{PO}^2 + r'^2 - r^2$. Punctul ω se află la intersecția cercului de rază $P\omega$ cu cercul de diametru $\overline{OO'}$. (G. M. XXVIII). **632.** a) Se arată că unghiurile opuse sînt suplimentare. b) Cercurile $OMBN$, $OPDQ$ și $MNPQ$, luate cîte două, au ca axe radicale pe MN, PQ și AC, deci se întîlnesc în centrul radical. La fel pentru celelalte. **633.** Fie (Δ) axa radicală a cercurilor (O'), (O''); (Δ') aceea a cercurilor (O), (O''); (Δ'') a cercurilor (O), (O'). Dacă centrele O, O', O'' sînt coliniare și dacă (Δ), (Δ'), (Δ'') se confundă într-o singură dreaptă, adică cercurile au, cîte două, aceeași axă radicală, atunci toate punctele acestei axe au puteri egale în raport cu cele trei cercuri; dacă O, O', O'' sînt coliniare, însă (Δ), (Δ'), (Δ'') nu se confundă, atunci nu există nici un punct (la distanță finită) care să aibă puteri egale în raport cu (O), (O'), (O''). În sfîrșit, dacă O, O', O'' nu sînt coliniare, atunci (Δ') și (Δ'') se întîlnesc într-un punct C care are puteri egale în raport cu (O), (O'), (O''), deci se găsește și pe (Δ). În cazul acesta există, deci, un singur punct C care să răspundă la problemă. În el se întîlnesc cele trei axe radicale (Δ), (Δ'), (Δ''). Punctul C se numește *centrul radical* al celor trei cercuri. **634.** Fie TT_1 și $T'T_2$ tangentele comune (fig.217)

Fig. 216

Fig. 217

$\overline{TT_1} = \overline{T'T_2}$; $\overline{TT_1^2} = \overline{OO_1^2} - (r_1-r)^2$ și $\overline{T'T_2^2} = \overline{OO_2^2} - (r_2-r)^2$, deci $\overline{OO_1^2} - \overline{OO_2^2} = (r_1-r)^2 - (r_2-r)^2 =$ const. Locul lui O este o dreaptă. Pentru ca locul să fie chiar mediatoarea, trebuie ca $\overline{OO_1} = \overline{OO_2}$, adică $(r_1-r)^2-(r_2-r)^2=0$; $r_1-r=\pm(r_2-r)$, de unde $r=\frac{r_1+r_2}{2}$, prin enunț $r_1 \neq r_2$ (R.M.F.1954). **635.** Se deduce din problema precedentă. Centrul cercului $O(r)$ este situat la intersecția celor două locuri geometrice corespunzătoare cercurilor (O_1), (O_2) și (O_1), (O_3). **636.** Fie A un punct comun lui (ω) și (O), A' lui (ω) și (O'). Tangenta în A la (O) fiind perpendiculară pe tangenta în A la (ω) este tocmai raza ωA, de asemenea $\omega A'$ este tangentă în A' la (O'); însă $\overline{\omega A}=\overline{\omega A'}$ ca raze, deci ω are aceeași putere în raport cu (O) și (O'). **637.** Se va observa că O și O' au aceleași puteri în raport cu (C) și (C'). Cercurile (C) și (C') se intersectează, deci, pe OO' în două puncte L, L' (punctele limită ale lui Poncelet). **638.** Fie (C'), (C'') două cercuri (C). Aceste cercuri au ca axă radicală dreapta $O'O''$ (problema precedentă). Cercurile (O), (C'), (C'') au ca centru radical un punct ω pe $O'O''$. Lăsînd cercul (C') fix și pe (C'') făcîndu-l să varieze, axele radicale ale cercurilor (O), (C)

Fig. 218

vor trece prin ω (G.M. VI). **639.** Fie AOB diametrul primului cerc, (O), A', B' punctele de intersecție cu al doilea. Avem $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OA'} \cdot \overline{OB'}$. **640.** Fie A_1 punctul de întîlnire al dreptelor AO și B_1C_1 (fig. 218), O_1 mijlocul segmentului $\overline{OD}$ și O_2 intersecția lui B_1C_1 cu perpendiculara dusă în A pe AD. Unghiul OA_1D este drept, A_1 se află pe cercul de diametru $\overline{OD}$, iar puterea punc-

ghiul DAO_2 fiind dreptunghic în A, iar A_1 fiind piciorul perpendicularei coborîte din vîrful unghiului drept pe ipotenuză, avem $\overline{AO_2^2} = \overline{O_2A_1} \cdot \overline{O_2D}$.(G.M. XXXII). **641.** Fie A_1 piciorul medianei din A. Puterea lui A_1 față de cercul ABC ne dă $\overline{AA_1} \cdot \overline{A_1D} = \frac{\overline{BC^2}}{4}$; $\overline{AA_1} = \frac{3}{2}\overline{AG}$ și $\overline{A_1D} = \overline{GD} - \frac{\overline{AG}}{2}$; înlocuind, avem $\frac{3}{2}\overline{AG} \cdot \overline{GD} = \frac{3}{4}\overline{AG^2} + \frac{\overline{BC^2}}{4}$; dar $\overline{AG^2} = \frac{4}{9}\overline{AA_1^2}$. Ținînd seama de teorema medianei, se ajunge la relația din enunț. **642.** Fie ω centrul unui cerc care intersectează cercurile (O), (O') de raze R, R' la extremitățile cîte unui diametru, $\overline{\omega O^2} + R^2 = \overline{\omega O'^2} + R'^2$; $\overline{\omega O^2} - \overline{\omega O'^2} = R'^2 - R^2$. Locul este o dreaptă. **643.** Se va aplica teorema medianei și se va deduce că $\overline{MA^2} - \overline{MO^2} = \text{const}$. Locul este o dreaptă. **644.** Fie O un punct între A și B, așa ca $\overline{OA} : \overline{OB} = \beta : \alpha$, se aplică relația lui Stewart $\overline{MA^2} \cdot \overline{OB} + \overline{MB^2} \cdot \overline{AO} = \overline{MO^2} \cdot \overline{AB} + \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{AB}$; însă $\overline{OA} = \overline{AB} \times \beta : (\alpha + \beta)$, $\overline{OB} = \overline{AB} \cdot \alpha : (\alpha + \beta)$; înlocuind, se deduce $\alpha \cdot \overline{MA^2} + \beta \cdot \overline{MB^2} = k^2 = (\alpha + \beta)\overline{MO^2} + \overline{AB} \cdot \alpha\beta^2 : (\alpha + \beta)$, de unde rezultă că $\overline{OM}$ este constant. Locul este un cerc. **645.** Soluția este analogă cu cea precedentă, O însă va fi situat pe prelungire și relația lui Stewart va fi modificată în consecință. Locul este un cerc. **646.** Pe $\overline{BC}$ se ia punctul N astfel ca $\overline{NB} : \overline{NC} = \gamma : \beta$ și pe $\overline{AN}$ se ia punctul O astfel ca $\overline{OA} : \overline{ON} = (\beta + \gamma) : \alpha$. Aplicînd relația lui Stewart triunghiului MBC și punctului N și apoi triunghiului MAN și punctului O, avem relațiile $\beta\overline{MB^2} + \gamma\overline{MC^2} = (\beta + \gamma)\ \overline{MN^2} + \beta\gamma\ \overline{BC^2} : (\beta + \gamma)$; $\alpha\overline{MA^2} + (\beta + \gamma)\overline{MN^2} = (\alpha + \beta + \gamma)\ \overline{MO^2} + \alpha(\beta + \gamma)\overline{AN^2} : (\alpha + \beta + \gamma)$. Adunînd și ținînd seama de enunț, se găsește că locul lui M este un cerc cu centrul în O (G.M. XVII). **647.** Fie D piciorul bisectoarei unghiului A pe latura $\overline{BC}$. Relația lui Stewart ne dă $b\overline{MB^2} + c\overline{MC^2} = (b + c)\overline{MD^2} + a^2bc : (b + c)$ și relația problemei dă $(b + c)\overline{MD^2} + a^2bc : (b + c) - a\overline{MA^2} = abc$. Să luăm pe prelungirea bisectoarei AD punctul O (centrul cercului exînscris în unghiul A) astfel ca $\overline{OD} : \overline{OA} = a : (b + c)$. Deducem $(b + c)\overline{MD^2} - a\overline{MA^2} = (b + c - a)\overline{MO^2} - \overline{AD^2}(b + c)a : (b + c - a)$ și relația de mai sus devine $(b + c - a)\overline{MO^2} - \overline{AD^2}(b + c)\ a : (b + c - a) + a^2bc : (b + c) = abc$. Locul lui M este un cerc cu centrul în O. **648.** În relația lui Stewart, presupunem că M este piciorul bisectoarei. Se va observa că $\overline{MB} : c = \overline{MC} : b = a : (b + c)$, înlocuind de aici pe $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ în primul membru al rela-

tului O_2 în raport cu acest cerc este deci $\mu = \overline{O_2A_1} \cdot \overline{O_2D}$. Triunţiei lui Stewart se găseşte $bc = \overline{MA}^2 + \overline{MB} \cdot \overline{MC}$. **649.** Relaţia din enunţ va rezulta din triunghiurile dreptunghice PBC, PCA, PBD, PAD. **650.** Fie E, F, G mijloacele lui $\overline{BC}, \overline{AD}$ şi $\overline{AC}$. $\overline{EG} \| \overline{AB}, \overline{GF} \| \overline{CD}$, deci $\overline{EG} \perp \overline{GF}$. Se va scrie relaţia între laturile triunghiului dreptunghic EGF şi se va observa că $\overline{AB} = 2\overline{EG}$, $\overline{CD} = 2\overline{FG}$. **651.** Pe lîngă notaţiile din soluţia precedentă, fie H mijlocul lui $\overline{AB}$, I al lui $\overline{CD}$. Din problema precedentă avem $4\overline{EF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$ şi din

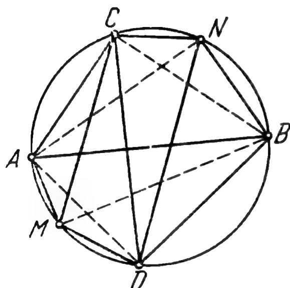


Fig. 219

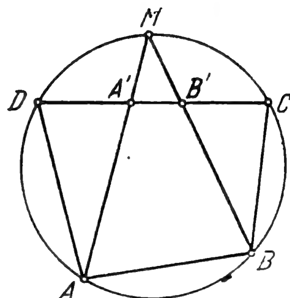


Fig. 220

$\triangle PIH$ se deduce $\overline{IH}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PI}^2$. Se observă că $2\overline{PH} = \overline{PA} + \overline{PB}$, $2\overline{PI} = \overline{PC} + \overline{PD}$, $\overline{AB} = \overline{PA} - \overline{PB}$, $\overline{CD} = \overline{PD} - \overline{PC}$, deci $2(\overline{EF}^2 + \overline{IH}^2) = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$. *Altă soluţie.* Se aplică problema 556 paralelogramului $EHIF$ şi se observă că $2\overline{EH} = \overline{AC}$, $2\overline{EI} = \overline{BD}$. **652.** $(\overline{AC} + \overline{BD})^2 - (\overline{AD} + \overline{BC})^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 + 2(\overline{AC} \cdot \overline{BD} - \overline{AD} \cdot \overline{BC}) = 2(\overline{AC} \cdot \overline{BD} - \overline{AD} \cdot \overline{BC})$; însă în virtutea teoremei lui Ptolomeu $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$. **653.** Se aplică teorema lui Ptolomeu patrulaterelor $ACNB$ şi $ABDM$ (fig. 219); se obţine $\overline{BC} \cdot \overline{AN} = \overline{AC} \cdot \overline{BN} + \overline{AB} \cdot \overline{CN}$, $\overline{AD} \cdot \overline{BM} = \overline{AM} \cdot \overline{BD} + \overline{AB} \cdot \overline{MD}$; scăzînd se găseşte relaţia cerută. Dacă N se află pe arcul BD, atunci în loc de BN se va pune $-BN$ etc. **654.** AM este bisectoare în triunghiul ACD şi BM în triunghiul BCD (fig. 220). Se ţine seama de raportul în care bisectoarea împarte latura opusă şi se obţine $\frac{\overline{A'D}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C} \cdot \overline{B'D}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}$, însă $\overline{A'C} = \overline{A'B'} + \overline{B'C}$; $\overline{B'D} = \overline{A'B'} + \overline{A'D}$. Se face produsul, se scoate $\overline{A'B'}$ factor comun şi se ţine seama de teorema lui Ptolomeu în patrulaterul dat (R.M.T.). **655.** Fie O punctul comun diagonalelor; avem $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2R \cdot \overline{BO}$, $\overline{AD} \cdot \overline{DC} = 2R \cdot \overline{DO}$ (probl. 492) şi $\overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ în

virtutea teoremei lui Ptolomeu (G.M.IV). **656.** Se vor aplica cele spuse la problema 571 și se va deduce că R, R' fiind razele cercurilor ABC, $A'B'C'$, valoarea comună a expresiilor din enunț este $3(R^2+R'^2)$ **657.** Fie O_1, O_2,..., O_6 mijloacele laturilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ și ale diagonalelor $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. Avem puterile P_1, P_2,...,P_6 ale lui P în raport cu cele șase cercuri, avînd segmentele precedente ca diametre, precum și puterile P_{13}, P_{24}, P_{56} în raport cu cercurile, avînd pe $\overline{O_1O_3}$, $\overline{O_2O_4}$, $\overline{O_5O_6}$ ca diametre. Se va observa că figurile $O_1O_2O_3O_4$, $O_1O_5O_3O_6'$, $O_2O_5O_4O_6$ sînt paralelograme, cu același punct de întîlnire al diagonalelor; se va aplica acestor paralelograme problema 556. **658.** Avem $\overline{HO}^2-R^2=\overline{HA}\cdot\overline{HC}=$ $=\overline{H\omega_1^2}-r^2$; $\overline{H\omega_1^2}=\overline{HO}^2-R^2+r^2$ și se deduce $\overline{H\omega_1}=\overline{H\omega_2}=\overline{H\omega_3}=$ $=\overline{H\omega_4}$ (G.M. XXXIII). **659.** Fie A, B două puncte conjugate în raport cu cercul (C). Cercul (AB) descris pe segmentul $\overline{AB}$ ca diametru este ortogonal cu (C) și dacă se consideră cele două cercuri (A), (B) cu centrele în A, B și ortogonale cu (C), avem trei cercuri (A), (B), (AB) ale căror centre sînt coliniare și care sînt ortogonale cu un același cerc. Ele aparțin deci aceluiași fascicul. Astfel $\overline{AB}^2$ este egal cu suma pătratelor razelor cercurilor (A) și (B). Dar pătratele acestor raze sînt egale cu puterile punctelor A,B în raport cu (C). **660.** $\triangle ABD\sim\triangle CAD$ (fig. 221). Deci $\overline{DB}:\overline{DC}=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$ și AM este simediana corespunzătoare

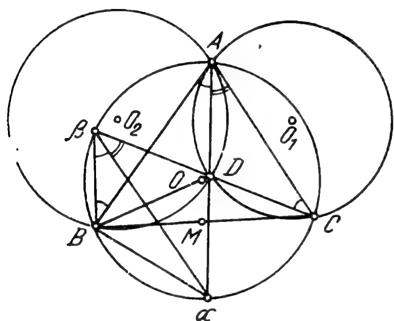


Fig. 221

laturii $\overline{BC}$. Fie α și β punctele de întîlnire ale dreptelor AD și CD cu cercul ABC. Avem $\sphericalangle B\beta\alpha=\sphericalangle BA\alpha=\sphericalangle AC\beta=\sphericalangle AB\beta$. Deci $A\alpha\|B\beta$, apoi avem $\sphericalangle\alpha\beta C=\sphericalangle\alpha AC$ și deci $\sphericalangle\alpha\beta D=\sphericalangle ABD$. Triunghiul $B\beta D$ este isoscel și D este mijlocul lui $\overline{A\alpha}$ (G.M. XXXI). **661.** Fie O_1, O_2 (fig. 222) centrele cercurilor, R_1, R_2 razele lor, T piciorul axei radicale pe linia centrelor O_1O_2, M punctul dat, iar N și P proiecțiile lui pe linia centrelor și pe axa radicală. Avem $p_1-p_2=$ $=\overline{MO_1^2}-\overline{MO_2^2}-R_1^2+R_2^2=\overline{O_1O_2}(\overline{NO_1}+\overline{NO_2})+R_2^2-R_1^2$. Dar T fiind pe axa radicală, $\overline{TO_2^2}-\overline{TO_1^2}=R_2^2-R_1^2$. Deci $p_1-p_2=\overline{O_2O_1}(\overline{NO_1}+$ $+\overline{NO_2})-\overline{O_2O_1}(\overline{TO_1}+\overline{TO_2})=2\overline{O_2O_1}\cdot\overline{NT}=2\overline{O_2O_1}\cdot\overline{MP}$ (G.M. VI). **662.** Fie OO', L_b, L_c distanța centrelor celor două cercuri și distanțele punctelor B și C la axa radicală a cercurilor considerate

(fig. 223). După problema precedentă avem $\overline{A'B} \cdot \overline{A''B} = 2 \cdot \overline{OO'} \cdot L_b$, $\overline{A'C} \cdot \overline{A''C} = 2 \cdot \overline{OO'} \cdot L_c$. Se împart aceste egalități parte cu parte și se observă că $\overline{A_1B} : \overline{A_1C} = L_b : L_c$. **663.** Pentru cercurile de centre B, C și de raze R_b, R_c enunțul ne dă condiția $\overline{BA}^2 + R_b^2 = \overline{CA}^2 + R_c^2$ care ne arată că piciorul axei radicale a celor două cercuri

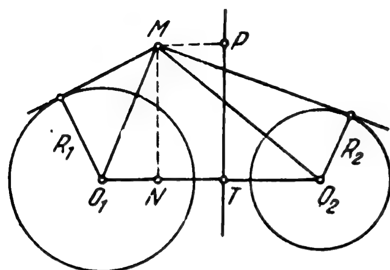


Fig. 222

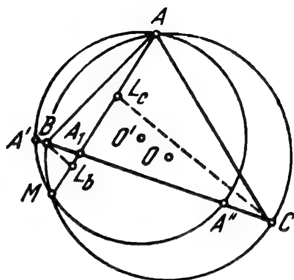


Fig. 223

pe latura $\overline{BC}$ este izotomicul piciorului înălțimii coborîte din vîrful A (G.M. XXX). **664.** Fie D (fig. 224) simetricul vîrfului A în raport cu mediatoarea laturii $\overline{BC}$ și D' simetricul lui D în raport cu $\overline{BC}$, iar EE' FF' dreptele analoge cu DD' în raport cu laturile $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Cercurile (A, a), (B, b), (C, c) au ca axe radicale două cîte două, dreptele DD', EE', FF' care se întîlnesc în punctul R, simetricul ortocentrului în raport cu centrul cercului circumscris. Cercul (A_1, m_a) trece și el prin D și D', deoarece $\overline{AA_1} = \overline{DA_1} = \overline{D'A_1}$. Deci cercurile (B, b), (C, c), (A_1, m_a) au ca axă radicală coarda comună $\overline{DD'}$ și R va avea puteri egale în raport cu aceste cercuri (G.M. XXVIII). **665.** Fie D proiecția lui I pe AC (fig. 225),

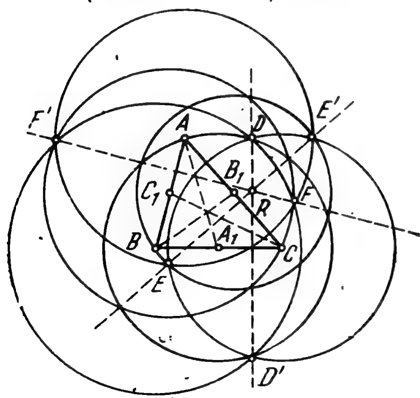


Fig. 224

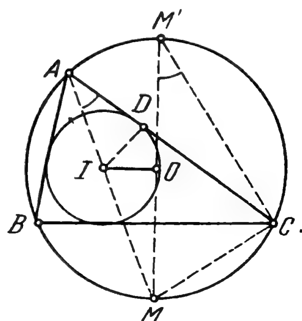


Fig. 225

M mijlocul arcului BC, M' punctul diametral opus în cercul (O). $\Delta AID \sim MM'C$, deci $\overline{AI}:\overline{MM'}=\overline{ID}:\overline{MC}$; însă $\overline{MM'}=2R$, $\overline{ID}=r$, $\overline{MC}=\overline{IM}$ (probl. 287), deci $\overline{AI}\cdot\overline{IM}=R^2-\overline{OI}^2=2Rr$. **666.** Luăm un punct A pe (O) şi ducem tangentele AB, AC la (I). Dreptele BI, CI întîlnesc cercul (O) în B', C'. Fie A_1 diametral opusul lui A în (O) şi M punctul de tangenţă al laturii AB cu (I). Apoi $\Delta BMI \sim \Delta AB'A_1$. Deci $\overline{BI}\cdot\overline{B'A}=2Rr$ şi cum $\overline{BI}\cdot\overline{IB'}=R^2-\overline{OI}^2=2Rr$, rezultă $\overline{B'I}=\overline{B'A}$. Analog $\overline{C'I}=\overline{C'A}$. Deci $\overline{B'C'}$ este perpendiculară pe mijlocul lui $\overline{AI}$. Avem $\sphericalangle B'C'A=\sphericalangle B'C'I=\sphericalangle B'C'C$, $\sphericalangle B'BC=\sphericalangle B'BA$, BC este tangenta cercului (I). **667.** Centrul cercului XYZ este I (fig. 226), centrul cercului $I_aI_bI_c$

Fig. 226

este J, situat pe OI şi astfel ca $\overline{OJ}=\overline{OI}$. Deci S este pe OI şi $\overline{SI}:\overline{SJ}=r:(2R)$. S este deci fix. Deoarece H_t şi I sînt ortocentrele triunghiurilor XYZ, $I_aI_bI_c$, H_t se află pe SI, adică pe OI şi $\overline{SH_t}:\overline{SI}=r:(2R)$. H_t este fix. De asemenea centrul de greutate G_t al lui XYZ este fix, căci se află pe OI şi $G_tH_t=G_tI$. **668.** $\triangle A'AI \sim \triangle A''I\alpha$ (fig. 227), căci $\sphericalangle A''I\alpha=\sphericalangle A''AA'$ şi din probl. 665, $2R=\overline{AA'}\cdot I\alpha=R^2-\overline{OI}^2=\overline{IA}\cdot\overline{IA''}$. Dar $\overline{AA}:\overline{IA''}=\overline{IA}:\overline{I\alpha}$. Deci $\sphericalangle AA'I=\sphericalangle AA''\alpha$ (G.M. VII). **669.** A_1 fiind piciorul înălţimii şi α intersecţia lui AA'' cu BC, se observă că α are puteri egale faţă de cercul ABC şi cercul $A'B'C'$. Deci α şi analogele lui se găsesc pe axa radicală a cercurilor ABC, $A'B'C'$. **670.** Fie ω_1, ω_2, ω_3 centrele celor trei cercuri

(fig. 228), α este centrul radical al cercurilor (O), (O'), (ω_1); α, β, γ se găsesc pe axa radicală a cercurilor (O), (O') (G.M.). **671.** În patrulaterele inscriptibile $B_1C'C_aB$ și $C_1C'C_aC$ avem $\sphericalangle C_aB_1C' = \sphericalangle C_aBC'$, $\sphericalangle C_aC_1C' = \sphericalangle C_aCC'$, deci $\sphericalangle C_aB_1C' + \sphericalangle C_aC_1C' = 90°$ și C_a se află pe cercul descris pe $\overline{B_1C_1}$ ca diametru. De asemenea B_a se află pe acest cerc (probl. 207). Fie (Γ_t) cercul lui Taylor (probl. 593) care trece prin B_a, C_a și analogele lor. Axa radicală a cercurilor (Γ_t), (Γ_b) este AC, iar a cercurilor (Γ_t), (Γ_c) este AB. Deci axa radicală a cercurilor (Γ_b), (Γ_c) este perpendiculara dusă din A pe linia centrelor, care este paralelă cu $B'C'$. Această dreaptă trece (probl. 231) prin centrul O al cercului circumscris (G.M. XXII). **672.** Se consideră un cerc (Γ) concentric cu cercul

Fig. 227

Fig. 228

înscris, care intersectează laturile ce pleacă din vîrfurile A, B, C, respectiv în perechile de puncte (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) și fie (O_a), (O_b), (O_c) cercurile tangente la laturile lui ABC în perechile de puncte (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2). Avem $\overline{A_1B_2} = \overline{A_2C_1}$ ca coarde egal depărtate de centru și $\overline{AD_1} = \overline{AA_2}$. Rezultă că $\overline{AB_2} = \overline{AC_1}$ și deci A aparține axei radicale a cercurilor (O_b), (O_c). De asemenea D aparține acestei axe, căci $\overline{DB_1} = \overline{DC_2}$. Dreptele AD, BE, CF concură în centrul radical al cercurilor (O_a), (O_b), (O_c) (G.M. XXXI). **673.** Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor, A'', B'', C'', A_2, B_2, C_2 celelalte puncte ale înălțimilor și medianelor situate pe cercul lui Euler, H_1, H_2, H_3 proiecțiile ortocentrului pe laturile lui $A'B'C'$. $\Delta A_1B'A'' \sim \Delta A'H_2H$, deoarece $\sphericalangle C'A'A'' = \sphericalangle A''A'B'$ și $\sphericalangle A''A'B' = \sphericalangle A''A_1B'$. Rezultă $\overline{A''B} : \overline{HH_2} = \overline{A''A_1} : \overline{HA'}$. Dar

$\overline{A''B'}=\overline{HA''}=\overline{AA''}$ și $\overline{HH_2}=\overline{HH_1}$, deci $\overline{AA''}:\overline{HH_1}=\overline{A''A_1}:\overline{HA'}$ și $\triangle AA''A_1\sim\triangle HH_1A'$. Rezultă $\sphericalangle HA'H_1=\sphericalangle AA_1A''=\sphericalangle A_2A'A''$ și dreptele $A'H_1$ și $A'A_2$ sînt izogonale în unghiul $B'A'C'$. (G.M.XXX) **674.** Fie I_a centrul cercului exînscris în unghiul A, A_1 mijlocul laturii $\overline{BC}$, D și E respectiv proiecțiile punctelor I și I_a pe latura BC, iar D' diametral opusul lui D în cercul (I). Vîrful A este centrul de asemănare al cercurilor (I) și (I_a). Deci punctele A, D', E sînt coliniare. Dreapta A_1I este paralelă cu ED' și deci trece prin mijlocul lui $\overline{AD}$ (G.M. XXXIII). **675.** Perpendiculara în N pe AI întîlnește laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ în A_c, A_b. Fie B_c, B_a, C_a, C_b punctele analoge iar D, E, F punctele de contact ale laturilor lui ABC cu cercul înscris. Avem $NC_b \| DE$, $NB_c \| DF$, deci $B_cC_b \| EF$ și $\overline{EC_b}=\overline{FB_c}$. **676.** Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor triunghiului ABC (fig. 229). Punctele A', B', C', A_1, B_1, C_1 sînt situate pe cercul celor nouă puncte, deci $\overline{MA'}\cdot\overline{MA_1}=\overline{MB}\cdot\overline{MC}$. Patrulaterul $BCB'C'$ este inscriptibil, deci $\overline{MB'}\cdot\overline{MC'}=\overline{MB}\cdot\overline{MC}$; punctul M are aceeași

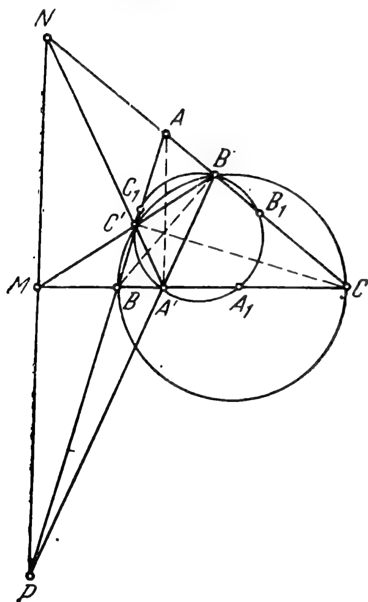


Fig. 229

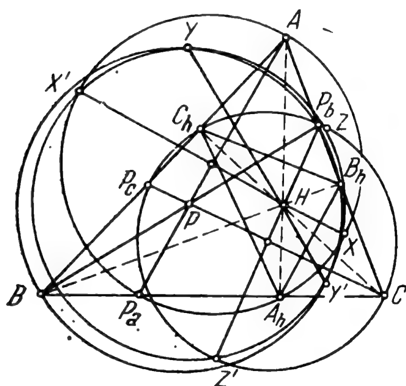


Fig. 230

putere în raport cu cercul ABC și cu cercul celor nouă puncte: el se găsește pe axa lor radicală, care este MNP. **677.** Se va observa că în patrulaterul inscriptibil $BC'B'C$ avem $\overline{HB}\cdot\overline{HB'}=\overline{HC}\cdot\overline{HC'}$. **678.** O este centrul radical al celor trei

cercuri, dar după problema precedentă $\overline{HA}\cdot\overline{HA'}=\overline{HB}\cdot\overline{HB'}=$ $=\overline{HC}\cdot\overline{HC'}$. Deci OH este axa radicală comună. **679.** În problema precedentă, centrul cercului care trece prin AA' și este ortogonal cercului (O) se găsește la intersecția tangentei în A la cercul (O) cu perpendiculara dusă prin mijlocul lui $\overline{AA'}$. Cele trei cercuri avînd aceeași axă radicală, rezultă că centrele lor sînt coliniare (probl. 633). Însă centrele sînt mijloacele tangentelor $\overline{AT_a}$, $\overline{BT_b}$, $\overline{CT_c}$, T_a, T_b, T_c, fiind intersecțiile tangentelor cu laturile opuse. Dacă T'_b este intersecția lui T_aT_c cu AC, se va arăta că T_b, T'_b coincid, ținînd seama de probl. 533. **680.** Fie $A_hB_hC_h$ triunghiul ortic (fig. 230). Avem $\overline{HX}\cdot\overline{HX'}=\overline{HA}\cdot\overline{HA_h}$ și din probl. 677 deducem $\overline{HX}\cdot\overline{HX'}=\overline{HY}\cdot\overline{HY'}=\overline{HZ}\cdot\overline{HZ'}$. Se mai observă că cevienele lui P sînt mediatoarele segmentelor $\overline{XX'}$, $\overline{YY'}$, $\overline{ZZ'}$. **681.** Coardele $\overline{XX'}$, $\overline{BB_h}$ dau în cercul ABC: $\overline{HX}\cdot\overline{HX'}=\overline{HB}\cdot\overline{HB_h}$ și se deduce $\overline{HX}\cdot\overline{HX'}=\overline{HY}\cdot\overline{HY'}=\overline{HZ}\cdot\overline{HZ'}$. Mediatoarele coardelor $\overline{XX'}$, $\overline{YY'}$, $\overline{ZZ'}$ trec respectiv prin mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, centrele celor trei cercuri construite și sînt paralele cu dreptele AQ, BQ, CQ. Deci centrul cercului se află în Q' complementarul lui Q (omologul lui Q considerat ca făcînd parte din triunghiul ABC, în triunghiul median). **682.** H are aceeași putere față de cercurile considerate. Axele radicale XX', YY', ZZ' trec, deci, prin H și avem $\overline{HX}\cdot\overline{HX'}=\overline{HY}\cdot\overline{HY'}=\overline{HZ}\cdot\overline{HZ'}$. Aceste axe sînt respectiv perpendiculare pe liniile centrelor cercurilor corespunzătoare. Ele concură în complementarul R' al lui R și sînt respectiv mediatoarele coardelor $\overline{XX'}$, $\overline{YY'}$, $\overline{ZZ'}$. R' este centrul cercului $XX'YY'ZZ'$. **683.** Cele patru laturi ale patrulaterului, prelungite, formează patru triunghiuri. Se ia unul din ele se observă că cele trei cercuri din problemă trec prin picioarele înălțimilor acestui triunghi și se arată că puterile punctului de întîlnire a înălțimilor în raport cu cele trei cercuri sînt egale. Prin urmare, există patru puncte, corespunzătoare celor patru triunghiuri, care au aceeași putere în raport cu cele trei cercuri. Nu se poate deci (probl. 633) decît ca cercurile să aibă centrele lor coliniare, ceea ce știm deja (probl. 533) și în același timp să aibă două cîte două aceeași axă radicală. **684.** Rezultă din soluția precedentă: dreapta în chestiune este axa radicală a cercurilor descrise pe diagonalele patrulaterului complet format din cele

patru drepte date. **685.** Fie $A'B'C'$ triunghiul ortic (fig. 231), $A_1B_1C_1$ triunghiul complementar, H ortocentrul, a, b, c punctele în care perpendicularele duse din I pe IA, IB, IC întîlnesc laturile opuse BC, CA, AB şi α, β, γ mijloacele segmentelor $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$. Dreapta lui Newton a patrulaterului format din laturile triunghiu-

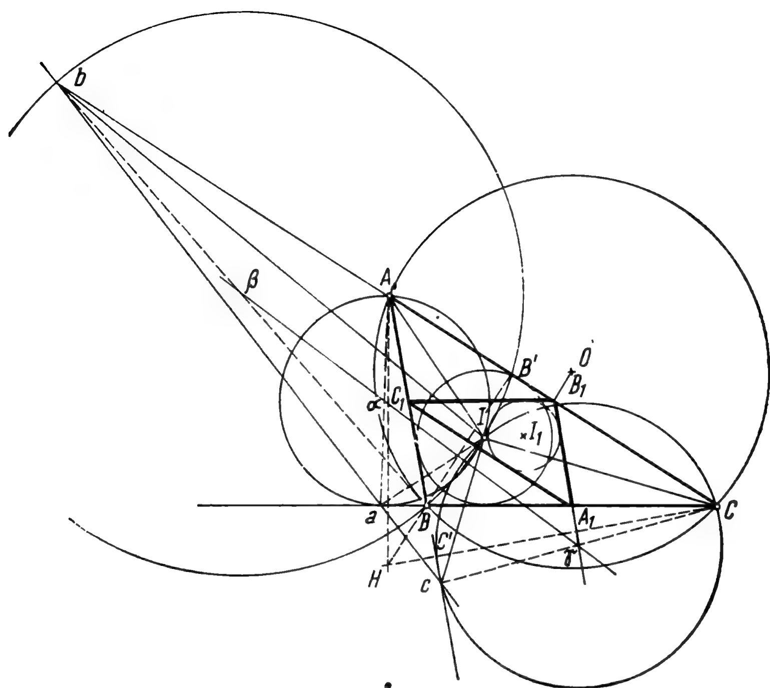


Fig. 231

lui şi de dreapta abc este dreapta $\alpha\beta\gamma$. Să considerăm cercurile (α), (β), (γ) descrise pe $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$ ca diametre. Aceste cercuri au ca axă radicală comună dreapta IH. Deci dreptele IH şi $\alpha\beta\gamma$ sînt perpendiculare. $HI \parallel OI_1$, căci trec prin puncte analoge în triunghiurile omotetice ABC, $A_1B_1C_1$ (G.M. XXXII). **686.** ***Prima metodă.*** Se presupune că cercurile nu sînt interioare. Fie AA' o tangentă comună care trece prin S, T proiecţia lui S' pe AA'. O, O', S, S' formează o diviziune armonică, deci A, A', T, S este o diviziune armonică. Mijlocul ω al lui $\overline{AA'}$ este situat pe axa radi-

cală și deoarece $\overline{\omega A}^2=\overline{\omega T}\cdot\overline{\omega S}$, teorema este demonstrată. *A doua metodă.* Fie $COD \parallel C'O'D'$. CC', DD' se intersectează în S; CD', $C'D$ în S'. Se consideră patrulaterul complet $CC'DD'SS'$ avînd ca diagonale CD, $C'D'$, SS' și se aplică problema 683. **687.** Se prelungește $\overline{EF}$ pînă intersectează latura AD în M (fig. 232); de asemenea se prelungește GF pînă intersectează pe BC în N. Deoarece $EF \parallel BD$ și $GF \parallel AC$, unghiurile GME și GNE sînt drepte, iar $EGMN$ inscriptibil, centrul cercului fiind mijlocul ω al segmentului $\overline{EG}$. Să căutăm axa radicală a cercurilor (O) și (ω). Pentru aceasta căutăm centrul radical al cercurilor (ω), (O) și (O_1) de diametru $\overline{OB}$. Axa radicală a cercurilor (ω) și (O_1) care au punctul E comun, se obține ducînd din E perpendiculara pe ωO_1 sau pe BF, $\omega O_1 \parallel BF$. Intersecția tangentei în B la (O) cu perpendiculara din E pe BE este centrul radical P, deci aparține axei radicale a cercurilor (O) și (ω). La fel se arată că Q aparține aceleiași axe radicale. PQ este axa radicală a cercurilor (O) și (ω) și este perpendiculară pe OF. Deoarece $PQ \perp OF$, rezultă că $PQ \parallel CD$ (R.M.T. b. V). **688.** Dreapta PM întîlnește cercurile (C), (O') în N', N, iar cercul (O) din nou în L. Avem $\overline{PM}\cdot\overline{PN'}=\overline{PA}^2$, dar $\overline{PM}\cdot\overline{PL}=\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PA}^2$, deci $\overline{PM}\cdot\overline{PN'}=\overline{PM}\cdot\overline{PL}$. Apoi $\overline{PL}=\overline{PN}$ și $\overline{PN}=\overline{PN'}$, deci N și N' se confundă. **689.** Se proiectează Q în I pe PG (fig. 233)

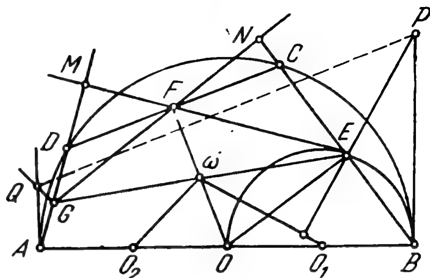


Fig. 232

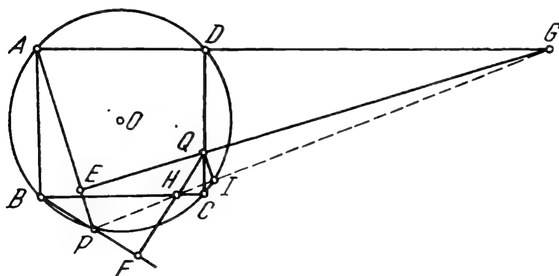


Fig. 233

și se observă că în patrulaterele inscriptibile $IQPE$ și $IGQD$ avem $\sphericalangle EPG = \sphericalangle IQG = \sphericalangle IDG$, deci I este pe cercul $ABCD$. Rezultă că BC, QF și GP sînt axele radicale ale cercurilor $ABCD$,

$QFBC$, $QIPF$ luate două cîte două; aceste axe se întîlnesc în centrul lor radical H. **690.** Se duce prin M o coardă $\overline{MQ}$ paralelă cu AP și se aplică teorema lui Ptolomeu patrulaterului $APQM$ observînd că $\overline{AQ}=\overline{PM}$, $\overline{QM}=\overline{PB}$. **691.** Din $\overline{OA}\cdot\overline{OP}=R^2=\overline{OM}^2$, deducem $\triangle OAM\sim\triangle OMP$, deci $\sphericalangle OAM=\sphericalangle OMP$. Dacă M' este simetricul lui M în raport cu$(\triangle)$ avem $\triangle OPM\sim\triangle MPM'$ ca avînd toate unghiurile egale. Deci $\overline{MP}:\overline{OP}=\overline{MM'}:\overline{MP}=2\overline{MN}:\overline{MP}$ sau $\overline{MP}^2:\overline{MN}=2\overline{OP}=$const. (G.M. XXXIII probl. 3576). **692.** Se va observa că $\triangle ABD\sim\triangle ADF$, $\triangle ACD\sim\triangle ADE$, deci $\overline{AD}^2=$ $=\overline{AB}\cdot\overline{AF}=\overline{AC}\cdot\overline{AE}, \overline{AE}:\overline{AB}=\overline{AF}:\overline{AC}$ $R':R=\overline{AE}\cdot\overline{AF}:\overline{AB}\cdot\overline{AF}=$ $=\overline{AE}\cdot\overline{AF}:\overline{AD}^2$. **693.** Se duce prin A și B un cerc care intersectează pe (O) în C, D. AB, CD se întîlnesc în E, din E se duc tangentele EF, EG la (O). Avem $\overline{EF}^2=\overline{EG}^2=\overline{EC}\cdot\overline{ED}=\overline{EA}\cdot\overline{EB}$, deci cercurile ABF, ABE răspund la problemă. **694.** Fie B' simetricul lui B în raport cu (D). Se duc prin B, B' cele două cercuri (probl. 693) tangente la cercul descris din A ca centru cu l ca rază. Fie M centrul unuia din aceste cercuri. M răspunde la problemă, căci AM trece prin punctul K de contact al cercurilor si $\overline{AK}=l=\overline{AM}+$ $+\overline{MK}=\overline{AM}+\overline{MB}$. **695.** Se va aplica problema precedentă. Cel mult două soluții, care în realitate nu sînt diferite între ele. **696.** Fie O, O' centrele celor două cercuri. Se duc două diametre AOB, $A'O'B'$. Dreapta AB' intersectează cercurile (O) și (O') în D și C', iar dreapta BA' intersectează aceleași cercuri în C și D'. Dreptele AC, $A'C'$ se intersectează în M, iar BD și $B'D'$ se intersectează în N. MN este axa radicală cerută (G.M. XI). **697.** Se va observa că $\overline{OE}+\overline{ED}=\overline{OC}+\overline{CB}$, deci $\overline{OE}-\overline{OC}=a-b$. Apoi $\overline{OE}:\overline{OC}=\overline{OA}:\overline{OE}=(\overline{OA}-\overline{OE}):(\overline{OE}-\overline{OC})=b:(a-b)$, deci $OE:b=OC:(a-b)=(a-b):(2b-a)$, $\overline{OE}=b(a-b):(2b-a)$, $\overline{OC}=$ $=(a-b)^2:(2b-a)$, $\overline{AB}=2b^2:(2b-a)$, $\overline{AC}=(a^2+2b^2-2ab):(2b-a)$. **698.** Se proiectează D în M și N pe $\overline{BC}$ și $\overline{AE}$. Avem $\overline{AD}^2=\overline{AE}^2+$ $+\overline{DE}^2\pm 2\overline{AE}\cdot\overline{EN}, \overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2\pm 2\overline{BC}\cdot\overline{CM}$, semnul depinde de $\sphericalangle C=\sphericalangle E$. Se va observa că $\overline{MC}:\overline{NE}=\overline{DC}:\overline{DE}$, deci $\overline{DC}\cdot\overline{BC}\cdot$ $\cdot\overline{AD}^2-\overline{DE}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{BD}^2=\overline{DC}\cdot\overline{BC}(\overline{AE}^2+\overline{DE}^2)-(\overline{DE}\cdot\overline{AE}(\overline{BC}^2+$ $+\overline{CD}^2)=$ const, relație de forma $\alpha\cdot\overline{AD}^2-\beta\cdot\overline{BD}^2=K^2$; locul lui D este un cerc (probl. 582, 583). **699.** Fie $Ox\perp Oy$, pe Ox luăm $\overline{OA}=a$, $\overline{OC}=c$ și pe Oy, $\overline{OB}=b$. Ducem $AD_1\|BC$, $D_1D_2\perp BC$, $D_2D_3\|BC$, $D_3D_4\perp BC$ etc.; D_1, D_2, D_3, ..., D_n se găsesc alternativ pe Oy și pe Ox. Se va observa că $b:c=\overline{OD_1}:a=\overline{OD_2}:\overline{OD_1}=\overline{OD_3}:\overline{OD_2}=\ldots$, deci $\overline{OD_1}=a(b:c)$, $\overline{OD_2}=a(b:c)^2$, ..., $\overline{OD_n}=a(b:c)^n$. **700.** Cen-

trele O, O' ale cercurilor se găsesc pe bisectoarele Ax, Ay ale unghiului BAC. Se va observa că punctul I, unde se întîlnesc perpendicularele ridicate în B și C pe AB și AC, este mijlocul lui $\overline{OO'}$. Din I se duce o perpendiculară pe BC care intersectează pe Ax, Ay în O și O'. **701.** Dintr-un punct P, luat pe un cerc, ca centru, se descrie un arc arbitrar, care intersectează cercul în A, B. Din A și B ca centre se descriu arce care să treacă prin P și care se intersectează în C. Din C ca centru și cu $\overline{CP}$ ca rază se duce un arc, care întîlnește primul arc construit în E și F. Arcele descrise din E şi F ca centre şi trecînd prin P, se intersectează în centrul căutat O (G.M. IV). **702.** Diagonalele AD, BE se întîlnesc în F, AD și CE în G. Se va observa că $\overline{AG}=\overline{BC}=\overline{FD}$. Apoi din $\overline{AD}:\overline{FD}=\overline{EB}:\overline{FB}=\overline{AG}:\overline{FA}$ se deduce $\overline{FD}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AF}=\overline{BC}^2$. Așadar se iau arbitrar diagonalele; laturile se găsesc împărțind diagonalele corespunzătoare în medie și extremă rație. **703.** Se ia $\overline{BC_1} \# \overline{CC'}$ și se observă că $\overline{BB'}:\overline{BC_1}=$const. E, mijlocul lui $\overline{B'C_1}$, descrie o dreaptă. M, mijlocul lui $\overline{B'C'}$, descrie o dreaptă paralelă cu BE. P este intersecția cercurilor $AB'C'$, ABC. Se observă că triunghiurile $BB'P$, $CC'P$ sînt asemenea, $\overline{PB}:\overline{PC}=$ const și deci P este fix. Cercurile $AB'C'$ au deci aceeași axă radicală, dreapta AP (G.M. XIX). **704.** Fie C_1 și C_2 proiecțiile lui C pe AD și pe AB, iar B_1 și D_1 proiecțiile lui B pe CD și a lui D pe BC. Din relațiile $\overline{HB}\cdot\overline{HD}=\overline{HA}\cdot\overline{HC}$, $\overline{KC}\cdot\overline{KC_2}=\overline{KB_1}\cdot\overline{KB}$, $\overline{IC}\cdot\overline{IC_1}=\overline{ID}\cdot\overline{ID_1}$ se deduce că H, I, K sînt pe axa radicală a cercurilor descrise pe $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$ ca diametre (G.M. XVIII). **705.** Perpendiculara coborîtă din A pe TT' o întîlnește în p și întîlnește din nou cercul ABC în R. Fie R' proiecția lui R pe BC. Construim $p\beta || RB$, $p\gamma || RC$, astfel că figurile $A\beta p\gamma$, $ABRC$ sînt omotetice. Ducem $AX' || BC$, $XPX' \perp BC$. Fie x punctul de întîlnire a dreptelor YZ și $\beta\gamma$. Deoarece R este pe cercul ABC, p se află pe cercul $A\beta\gamma$. Deci $\sphericalangle p\gamma x=\sphericalangle p\gamma\beta=\sphericalangle pA\beta=\sphericalangle pAZ$. Punctele A, Y, p, Z, P, X' găsindu-se pe cercul de diametru $\overline{AP}$, se deduce că patrulaterul $Yxp\gamma$ este inscriptibil. $\sphericalangle px\gamma=pY\gamma=180°-\sphericalangle pYA=\sphericalangle pX'A$, deci pxX' este o dreaptă. Fie D punctul de întîlnire a dreptelor Xx și pS; $\overline{Dp}:\overline{XX'}=\overline{px}:\overline{xX'}=$ raportul distanțelor de la p și A la $\beta\gamma=$ raportul distanțelor de la R și A la $\overline{BC}$ și egal cu $\overline{RR'}:\overline{XX'}$. Deci $\overline{Dp}=\overline{RR'}=\overline{pS}$ și D coincide cu S (probl. 280). A' fiind piciorul înălțimii din A, fie p' punctul de întîlnire al dreptei pS cu cercul $AA'p$. Patrulaterul $Xpp'X'$ fiind un trapez isoscel este inscriptibil. Să notăm cercurile XYZ, $XX'pp'$, $AYpZPX'$, respectiv cu L, M, N și fie x' intersecția cercurilor L și M. Axele

radicale ale cercurilor L, M, N luate două cîte două sînt dreptele Xx', $X'p$ și YZ. $X'p$, YZ trec prin x. Xx' va trece tot prin x și deci prin S. În sfîrșit din cercul $Xpx'p'X'$ deducem $\overline{SX} \cdot \overline{Sx'} = \overline{Sp} \cdot \overline{Sp'}$ = dublul produsului distanțelor de la centrul cercului circumscris O și ortopolul S la dreapta TT'. **706.** Din problema precedentă se deduce că cele patru puncte au puteri egale în raport cu cercurile descrise pe diagonalele patrulaterului ca diametre. Deci ele se găsesc (probl. 683) pe axa radicală comună celor trei cercuri, dreaptă pe care se află și ortocentrele celor patru triunghiuri (probl. 684).

XII. **707.** Se poate aplica problema 571. **708.** Fie DP axa radicală a cercurilor cu centrele în M și N (fig. 234); $DP \perp MN$, deci coincide în direcție cu AD. Avem $\overline{AP} \cdot \overline{AD}$ = puterea lui A față de cercul (M) și este $\overline{AM}^2 - \overline{MD}^2$. Fie $\overline{AO} = a$, atunci $\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 = 4a^2$. $\overline{DM}^2 = \overline{DB}^2 = l_3^2 = 3a^2$, deci $\overline{AP} \cdot \overline{AD} = a^2$ și cum $\overline{AD} = 2a$, rezultă $\overline{AP} = a/2$, adică P este mijlocul lui $\overline{AD}$. Rezultă de aici construcția care determină mijlocul unui segment numai cu compasul. **709.** Avem $\overline{BC} \cdot \overline{BD} = R^2$; $\overline{BD} - \overline{BC} = R$, deci $l_{10} = \overline{BC}$, $l'_{10} = \overline{BD}$. **710.** Fie AA_1A_2B, BA_3A_4C pătratele construite pe laturile consecutive $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ale hexagonului. Triunghiul BA_2A_3 fiind echilateral, rezultă că vîrfurile A_1, A_2, A_3, ..., A_{12} sînt vîrfurile unui dodecagon regulat. **711.** Fie

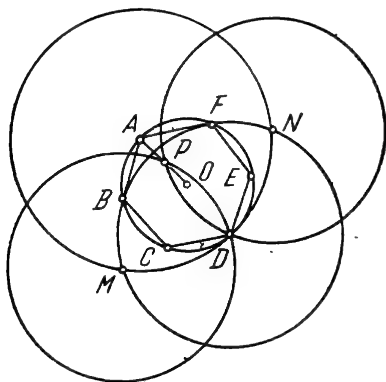


Fig. 234

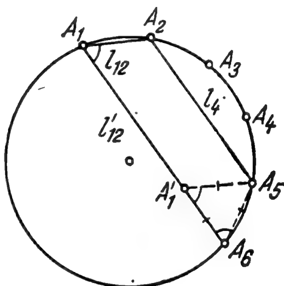
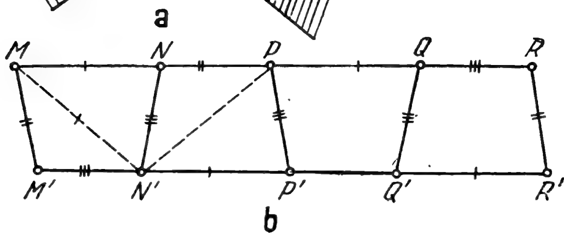


Fig. 235

$\overline{A_1A_2} = l_{12}$ și $\overline{A_1A_6} = l'_{12}$ (fig. 235); $\overline{A_2A_5} = l_4$. Se duce $A_5A'_1 \parallel A_1A_2$. Triunghiul $A'_1A_6A_5$ fiind echilateral, rezultă $\overline{A'_1A_6} = l_{12}$. **712.** Se taie banda după CD și AE (fig. 236, *a*), se desface nodul și banda întinsă dă fig. 236, *b*. Avem $\overline{MN} = \overline{N'P'}$, $\overline{NP} = \overline{RR'}$, apoi $\overline{PQ} = \overline{P'N'} = \overline{Q'R'}$, $\overline{QR} = \overline{NN'}$, $\overline{MN'} = \overline{PN'}$, $\overline{P'Q'} = \overline{MM'}$, $\overline{Q'R'} = \overline{QP}$. Se observă că $\sphericalangle MN'N = \sphericalangle P'NN'$, $\sphericalangle MNN' =$

$= \sphericalangle P'N'N$, $\sphericalangle N'PP' = \sphericalangle QP'P$, $\sphericalangle N'P'P = \sphericalangle QPP'$, $\sphericalangle PQQ' = \sphericalangle R'Q'Q$, $\sphericalangle PQ'Q = \sphericalangle R'QQ'$. Deci $MNP'N'$, $N'PQP'$, $PQR'Q'$ sînt romburi iar $N'NPP'$, $P'PQQ'$ trapeze isoscele. $NPQ'P'$ este paralelogram, $\Delta N'MP$ este isoscel, deci $\sphericalangle NPN' = \sphericalangle NMN'$, $\Delta N'NP = \triangle N'M'M$. Deci MN' este bisectoarea $\sphericalangle NMM'$, rezultă că $\triangle M'MN'$ este isoscel. Laturile pentagonului din fig. 236, b sînt egale. Fie $\sphericalangle M'NN' = \alpha$. În triunghiul MNN' avem $5\alpha = 180°$, $\alpha = 36°$. Fiecare unghi al pentagonului este $3\alpha = 108°$, deci este regulat (R.M.T. XIII. 2). **713.** Fie l_n și l'_n laturile poligoanelor înscrise și circumscrise cu n laturi (fig. 237). Din triunghiul dreptunghic OAA_1 rezultă $l'_n = \dfrac{2Rl_n}{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$, deci $K = \dfrac{l_n}{l'_n} = \dfrac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2R}$.
Aplicînd formula care dă latura poligonului cu un număr dublu de laturi: $l_{2n} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^2})}$, obținem $l'_{2n} = \dfrac{2Rl_{2n}}{\sqrt{4R^2 - l_{2n}^2}}$, deci $K' = \dfrac{l_{2n}}{l'_{2n}} = \dfrac{\sqrt{4R^2 - l_{2n}^2}}{2R}$. Înlocuind aici pe l_{2n}, rezultă ușor relația din enunț. **714.** Pornind de la hexagon se va aplica de două ori formula care dă latura unui poligon cu un număr îndoit de laturi. Se va găsi $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$. **715.** Fie $ABCDE$ pentagonul, BD, CE cele două diagonale, care se intersectează în F (fig. 238). Se duce $\overline{FG} \| \overline{CD}$ care intersectează pe $\overline{BC}$ în G. Se va observa că $\overline{BG} = \overline{GF} = \overline{FD}$, $\overline{BF} = \overline{BC}$. Din $\overline{BF} : \overline{BD} = \overline{BG} : \overline{BC}$ se deduce $\overline{BF} : \overline{BD} = \overline{FD} : \overline{BF}$. **716.** *Prima metodă.* Se duc două diametre perpendiculare, $\overline{MN}$, $\overline{AP}$ (fig. 239), apoi $\overline{OD} \perp \overline{PN}$, $\overline{BDC} \| \overline{MN}$. Triunghiul ABC este echilateral căci $\overline{BC}$ trece prin mijlocul lui $\overline{OP}$. *A doua metodă.* Se duce diametrul $\overline{AP}$. Pe $\overline{OP}$ ca bază se construiește un triunghi oarecare QOP. Se duc $\overline{OR} \| \overline{QP}$, $\overline{PR} \| \overline{QO}$, QR trece prin mijlocul I al lui $\overline{OP}$, $BIC \perp \overline{OP}$. ABC este triunghiul cerut. **717.** Se aplică teorema lui Ptolomeu patrulaterului $ACDE$; $\overline{AD} \cdot \overline{CE} = \overline{AC} \cdot \overline{DE} + \overline{CD} \cdot \overline{AE}$, însă $\overline{CE} = \overline{AC}$, $\overline{DE} = \overline{CD} = \overline{AB}$, $\overline{AE} = \overline{AD}$, deci $\overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{AB}(\overline{AC} + \overline{AD})$, care este sub altă formă relația cerută. **718.** Bisectoarea unghiului BAO întîlnește pe a unghiului AOB în O_1 și pe OB în O_2. Se va observa că $\sphericalangle OO_1O_2 = \sphericalangle OO_2O_1$. Vom avea în jurul lui O opt triunghiuri isoscele egale cu triunghiul OO_1O_2. $b = \overline{OO_2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Însă $\overline{OO_2} : \overline{OA} = \overline{O_2B} : \overline{AB} = \overline{OB} : (\overline{OA} + \overline{AB})$ și deoarece $\overline{OA} = \overline{OB} = a\sqrt{2}/2$, $\overline{OO_2} = a(2 - \sqrt{2})/2$, $b = a(2 - \sqrt{2})^{3/2}/2$. **719.** Începînd dintr-un punct A al

a



b

Fig. 236

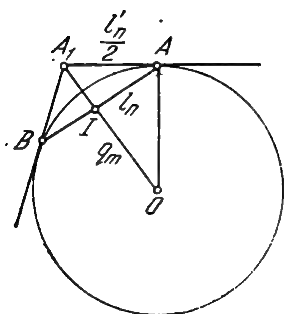


Fig. 237

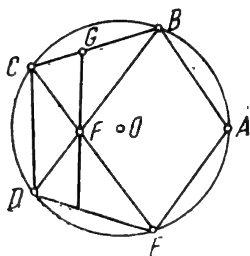


Fig. 238

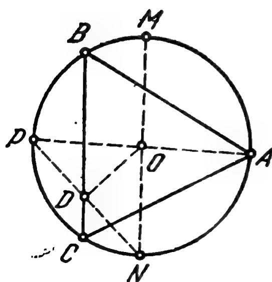


Fig. 239

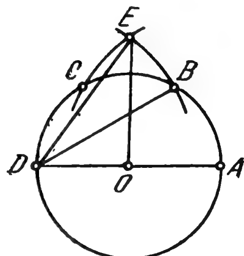


Fig. 240

cercului (O), se iau punctele B, C, D pe cerc, așa ca $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{OA}$ (fig. 240). D este diametral opus lui A. Din A ca centru cu $\overline{AC}$ ca rază și din D cu $\overline{DB}$ ca rază se descriu două arce care se întretaie în E. $\overline{OE}$ este latura pătratului înscris în (O), căci $\overline{OE}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{OD}^2$, însă $\overline{DE} = \overline{BD}$ = latura triunghiului echilateral $= \overline{OA} \cdot \sqrt{3}$, deci $\overline{OE} = \overline{OA} \cdot \sqrt{2}$. **720.** $\overline{MN}$ intersectează pe $\overline{AB}$ în P, pe $\overline{BC}$ în R (fig. 241). Din măsura unghiurilor se

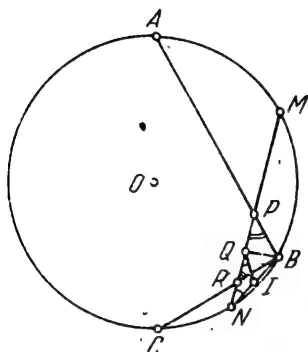


Fig. 241

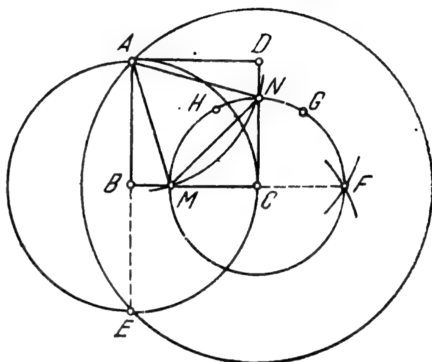


Fig. 242

deduce că $\sphericalangle ABC = 90°$, $\sphericalangle BRP = \sphericalangle BPR = 45°$. Fie Q mijlocul lui $\overline{PR}$, I al lui $\overline{BN}$; $\overline{BQ} \perp \overline{PR}$, $\overline{BQ} = \overline{RQ} = \overline{QP}$, $\overline{IQ} = \overline{IN} = \overline{IB}$, însă $\sphericalangle INQ = \sphericalangle IQN = 30°$, deci $\sphericalangle IQB = 60°$, $\overline{IB} = \overline{IQ} = \overline{BQ}$ și $\overline{PR} = \overline{BN}$; dar $\overline{BN}$ este latura dodecagonului, deci și $\overline{PR}$ (G.M.II). **721.** Fie $\overline{AB}$ latura pentagonului înscris în cercul (O), A' diametral opus lui A, $\overline{BC}$ latura decagonului, C este pe arcul BA'. $\overline{OC}$ intersectează pe BA' în E. Fie I mijlocul lui $\overline{AB}$. Se va observa că $\overline{OI} = \frac{1}{2}\overline{A'B} = \frac{1}{2}(\overline{BE} + \overline{EA'}) = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{OA'})$. **722.** Fie $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ trei laturi consecutive ale unui decagon înscris în cercul de centru O. $\overline{CO}$ se intersectează cu $\overline{AD}$ în M. Triunghiurile CDM și MAO fiind isoscele, rezultă $\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{CD}$. **723.** Fie A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12} vîrfurile dodecagonului regulat convex, înscris în cercul de rază $\overline{OA_1}$. Cum dintre numerele inferioare lui 12 numai 5 și 7 sînt prime cu 12, iar $7 + 5 = 12$, reiese că avem numai un dodecagon regulat stelat cu latura $\overline{A_1A_6}$. Fie I intersecția dreptelor A_1A_7 și A_6A_8. În triunghiul dreptunghic $A_1A_6A_7$ înălțimea este $\overline{A_6I}$ și $\overline{A_1A_6} : \overline{A_6I} =$

$= \overline{A_1A_7} : \overline{A_6A_7}$ sau $\overline{A_1A_6} \cdot \overline{A_6A_7} = \overline{A_6I} \cdot \overline{A_1A_7}$. Dacă R este raza cercului, atunci $\overline{A_6I} = \frac{1}{2}\overline{A_6A_8} = \frac{1}{2}R$; $\overline{A_1A_7} = 2R$ și avem $\overline{A_1A_6} \cdot \overline{A_6A_7} = R^2$ (G.M. XXIX). **724.** Se descrie din B ca centru un cerc de rază $\overline{BA} = \overline{BC}$ (fig. 242), din C cu $\overline{CA}$ ca rază un cerc care să intersecteze pe primul în A și E; E se găsește pe AB și $\overline{AB} = \overline{BE}$; din E și A ca centre cu $\overline{EA}$ ca rază se descriu două arce, care se intersectează în F. Din C cu $\overline{CF}$ ca rază se descrie un cerc, pe care se ia $\overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HM} = \overline{CF}$. M este pe $\overline{BC}$. Din A cu $\overline{AM}$ ca rază se descrie un arc care intersectează ultimul cerc în M și N. AMN este triunghiul cerut. Va fi destul să se arate că $\overline{AM} = \overline{MN}$. Se va pune $\overline{AB} = \overline{BC} = a$, $\overline{AM}^2 = a^2 + \overline{MB}^2 = a^2 + (a - \overline{CM})^2$, $\overline{CM} = \overline{CF} = \overline{BF} - a = a\sqrt{3} - a$, $\overline{AM}^2 = 4a^2(2 - \sqrt{3})$, $\overline{MN}^2 = 2\overline{CM}^2 = 4a^2(2 - \sqrt{3})$. **725.** Fie $\overline{AB}$ latura decagonului stelat, $\overline{AC}$ a pentagonului. Dacă D este mijlocul arcului BC, $\overline{BD} = \overline{DC}$ este latura poligonului cu 20 laturi. Se ia pe $\overline{AB}$, $\overline{AE} = \overline{AC}$; $\overline{AD}$ fiind perpendiculară pe mijlocul lui $\overline{CE}$, $\overline{DE} = \overline{DC} = \overline{BD}$, $\sphericalangle ABD = 45° = \sphericalangle BED$, deci $\sphericalangle BDE = 90°$, $\overline{BD}\sqrt{2} = \overline{BE} = \overline{AB} - \overline{AC}$. **726.** Se va nota latura poligonului cu a, diagonala $\overline{A_{2n+1}A_2} = \overline{A_1A_3} = \overline{A_2A_5} = \ldots = d$. Aplicînd teorema lui Ptolomeu patrulaterelor $A_{2n}A_{2n+1}A_1A'$, $A_{2n+1}A_1A_2A'$, $A_1A_2A_3A'$, $A_2A_3A_4A'$, ..., $A_{n-2}A_{n-1}A_1A'$ și $A_{n-1}A_nA'A_{n+1}$, găsim $d \cdot R = aa_1$, $da_1 = a(2R + a_2)$, $da_2 = a(a_1 + a_3)$, $da_3 = a(a_2 + a_4)$, ..., $da_{n-1} = a(a_{n-2} + a_n)$ și $da_n = a(a_{n-1} - a_n)$ și deci $d(R - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \mp a_{n-1} \pm a_n) = a(a_1 - 2R - a_2 + a_1 + a_3 - a_2 - a_4 + \ldots \pm a_{n-2} \pm a_n \mp a_{n-1} \mp a_n)$, deci $(d + 2a)(R - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \pm a_n) = 0$. **727.** Fie α unghiul sub care se vede din centru latura lui P, 2α va fi relativ la Q. Dacă P este convex, $2n\alpha = 360°$, deci $n \cdot 2\alpha = 360°$, ceea ce arată că Q este convex. Dacă P este stelat de speța p, atunci $2n\alpha = p \cdot 360°$, p și $2n$ fiind prime între ele. Atunci $n \cdot 2\alpha = p \cdot 360°$, p și n vor fi prime între ele, deci Q va fi stelat de speța p. **728.** Se vor aplica formulele $a_1 = (a + r)/2$, $r_1 = \sqrt{a_1 r}$, observînd că pentru pătrat latura este de 1 m, deci apotema $a = 0{,}5$ m, raza $r = \sqrt{2}/2$ m $= 0{,}707$ m. Se va găsi pentru octogon $a_1 = 0{,}603$ m, $r_1 = 0{,}653$ m și pentru poligonul cu 16 laturi $a_2 = 0{,}628$ m, $r_2 = 0{,}640$ m. Fie a_k, r_k apotema și raza poligonului cu $4 \cdot 2^k$ laturi, unde trebuie să ne oprim, ca să avem $R_k - a_k < 0{,}001$ m. Deoarece $r_k - a_k < (r_1 - a_1) : 4^{k-1} < (r - a) : 4^k$, va fi de ajuns ca $(r - a) : 4^k = 0{,}207 \text{ m} : 4^k <$

0,001 m sau $4^k > 207$, este de ajuns a se lua $k = 4$. Vom putea să ne oprim la poligonul cu $4 \cdot 2^4 = 64$ laturi.

XIII. **729.** $2S = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$. **730.** Se înlocuiesc în $S = bc/2$ catetele b, c în funcție de m_b, m_c. **731.** Din triunghiurile ADB, ADC (fig. 243), deducem $h^2 = c\beta$, $h^2 = b\alpha$, de unde $c = h^2/\beta$; $b = h^2/\alpha$, iar din triunghiul ADE, $h^2 = \alpha^2 + \beta^2$. **732.** Fie A, B, C, D și A', B', C', D' vîrfurile paralelogramului și dreptunghiului în același sens. $\overline{A'C'} \| \overline{BC}$, $\overline{B'D'} \| \overline{AB}$ (probl. 78). Diagonalele $\overline{A'C'}$, $\overline{B'D'}$ sînt egale cu $a-b$; $a > b$, A_1 și D sînt picioarele perpendicularelor din A și D' respectiv pe $\overline{BC}$ și $\overline{A'C'}$; O fiind intersecția diagonalelor, avem $\triangle ABA_1 \sim \triangle D'OD_1$,

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{D'D_1}} = \frac{b}{(a-b)/2}; \quad \frac{h}{\overline{D'D_1}} = \frac{2b}{a-b}; \quad \overline{D'D_1} = \frac{h(a-b)}{2b}; \quad S = ah.$$

$$s = \frac{h(a-b)^2}{2b}, \quad S : s = 2ab : (a-b)^2.$$

733. Laturile triunghiului fiind a, b, c: $\overline{O_1D}^2 = \overline{O_1O}^2 - \overline{OD}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 = \overline{T_1T}^2$ (fig. 244). **734.** $2Rh_a = bc$ (probl. 92), $2Rah_a = abc$.

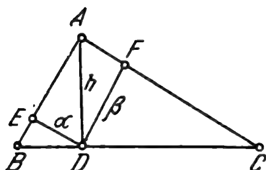


Fig. 243

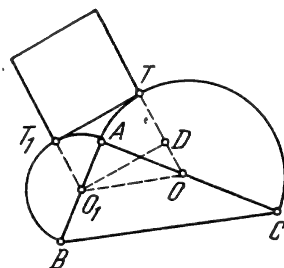


Fig. 244

735. Fie I centrul cercului înscris, aria $\triangle ABC$ = aria $\triangle BCI$ + + aria $\triangle CAI$ + aria $\triangle ABI$. **736.** Fie $A'B'C'$ triunghiul ortic al triunghiului ABC (fig. 245), O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Fie a', b', c' laturile triunghiului ortic. Avem $OA \perp B'C'$. Atunci aria patrulaterului ortodiagonal $AC'OB'$ =

$$= \frac{\overline{OA} \cdot \overline{B'C'}}{2} = \frac{1}{2} R \cdot a'; \quad \text{analog ariile: } (BA'OC') = \frac{1}{2} Rb';$$

$(CB'OA')=\frac{1}{2}Rc'$. Adunînd, avem $S=p'R$. **737.** Aria $\triangle ABC=$ $=$ aria $\triangle CAI_a=$ $+$ aria $\triangle ABI_a-$ aria $\triangle BCI_a$, I_a fiind centrul cercului exînscris în unghiul A. **738.** $t_1^2=\overline{O_3O_2}^2-\overline{O_2I}^2=\frac{a^2-(b-c)^2}{4}=$ $=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4}$ (fig. 246). În mod analog obținem t_2^2 și t_3^2, valori care introduse în expresie dau $2p(p-a)(p-b)(p-c)$, $p=\frac{a+b+c}{2}$.

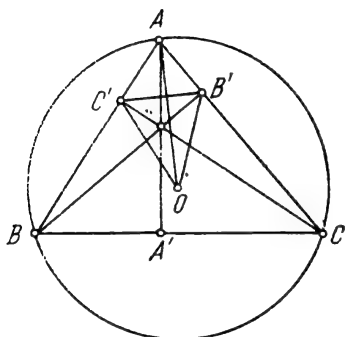


Fig. 245

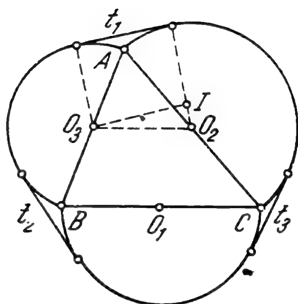
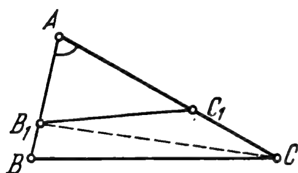


Fig. 246

739. $a+b+c>2a$; $p>a$. Aria triunghiului $S=\frac{ah_a}{2}=pr$; $h_a=$ $=\frac{2pr}{a}$, $h_a>2r$, analog $h_b>2r$; $h_c>2r$; adunînd inegalitățile, avem $h_a+h_b+h_c>6r$ (R. M. T. 1924). **740.** Se va aplica probl.



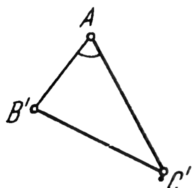


Fig. 247

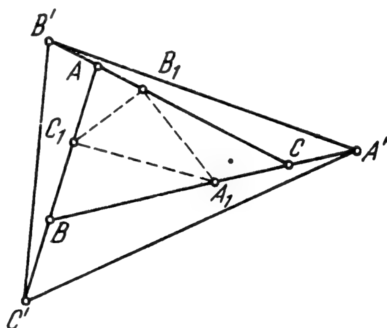


Fig. 248

735 și 737. **741.** Din $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ și probl. 735 și 737. **742.** Se ia pe $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$, $\overline{AB_1}=\overline{A'B'}$, $\overline{AC_1}=\overline{A'C'}$ (fig. 247) și se observă că aria $\triangle ABC$: aria $\triangle AB_1C = \overline{AB}:\overline{AB_1}$; aria $\triangle AB_1C$: :aria $\triangle AB_1C_1 = \overline{AC}:\overline{AC_1}$. **743.** Se ia pe $\overline{AB}$, $\overline{AB_1}=\overline{A'B'}$ și pe prelungirea lui $\overline{CA}$, $\overline{AC_1}=\overline{A'C'}$ și se observă că aria $\triangle ABC$: aria $\triangle ABC_1=$ $=\overline{AC}:\overline{AC_1}$; aria $\triangle ABC_1$: aria $\triangle AB_1C_1=\overline{AB}:\overline{AB_1}$. **744.** Dacă în două triunghiuri două unghiuri sînt egale sau suplimentare, raportul ariilor celor două triunghiuri este egal cu raportul produselor laturilor ce formează aceste unghiuri. Astfel avem (fig. 248)
$\frac{\text{aria } \triangle AB_1C_1}{S}=\frac{b_1(c-c_1)}{bc}$, $\frac{\text{aria } \triangle CA_1B_1}{S}=\frac{a_1(b-b_1)}{ab}$; $\frac{\text{aria } \triangle BC_1A_1}{S}=$
$=\frac{c_1(a-a_1)}{ac}$. De asemenea $\frac{\text{aria } \triangle AB'C'}{S}=\frac{b_1(c+c_1)}{bc}$, $\frac{\text{aria } \triangle CA'B'}{S}=$
$=\frac{a_1(b+b_1)}{ac}$ și $\frac{\text{aria } \triangle BC'A'}{S}=\frac{c_1(a+a_1)}{ac}$. Deducem: aria $\Delta A'B'C'-$
$-$ aria $\triangle A_1B_1C_1=2S\left(\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}\right)$ (R.M.F. 1952). **745.** R^2.
746. Se va observa că aria $\triangle MBC$: aria $\triangle ABC=\overline{MA''}:\overline{MA'}$etc. și se va face suma. **747.** Înălțimile intersectează cercul circum-

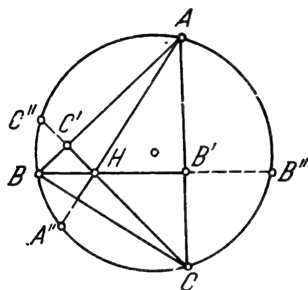


Fig. 249

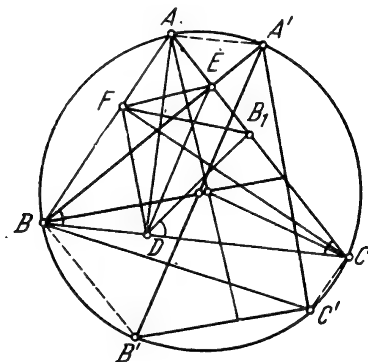


Fig. 250

scris în A'', B'', C'' (fig. 249); avem $\overline{BA'}\cdot\overline{CA'}=\overline{AA'}\cdot\overline{A'A''}=$ $=\overline{AA'}\cdot\overline{HA'}$ (probl. 231). Se va aplica apoi problema precedentă relativ la H. **748.** $\triangle B_1FD \sim \triangle BA'C'$ (fig. 250), $\sphericalangle A'BC=\sphericalangle ACB=\sphericalangle C$, $\sphericalangle B_1DC=\sphericalangle B_1CD=\sphericalangle C$; $BA' \parallel$ $\parallel DB_1$. Se arată la fel $BC' \parallel FB_1$, iar $FD \parallel A'C'$ ca

perpendiculare pe diametrul $\overline{OB}$. Avem $\overline{B_1D}=b/2$, $\overline{BA'}=b$ raportul este 1/2. Rezultă $(a'+b'+c')R=2(\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FD})R=4S$: $abc=4RS=(a'+b'+c')R^2$. **749.** $S=\overline{OA_1}(\overline{OA_1}+\overline{A_1B_1})+\overline{OA_2}(\overline{OA_2}+\overline{A_2B_2})=\overline{OA_1^2}+\overline{OA_1}\cdot\overline{A_1B_1}+\overline{OA_2^2}+\overline{OA_2}\cdot\overline{A_2B_2}$ (fig. 251). Pe de altă parte, $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_1}}=\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_2}}$; $\overline{OA_2}\times\overline{A_2B_2}=\overline{OA_1}\cdot\overline{A_1B_1}$, deci $S=\overline{OA_1^2}+\overline{OA_2^2}+2\overline{OA_2}\cdot\overline{A_2B_2}=\overline{OP^2}$ (G.M. XXX. 1). **750.** a) Din asemănare

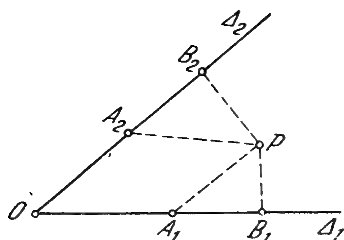


Fig. 251

avem $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$; $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AB}}$; $\overline{BD}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{BC}}$; $\overline{CE}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{BC}}$, $\overline{DE}=\overline{DA}+\overline{AE}=\frac{\overline{AB^2}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{AC^2}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB^2}+\overline{AC^2}}{\overline{BC}}$; $\overline{BD}+\overline{CE}+\overline{DE}=\frac{(\overline{AB}+\overline{AC})^2}{\overline{BC}}$ sau $\overline{AB}+\overline{AC}=\sqrt{\overline{BC}(\overline{BD}+\overline{CE}+\overline{DE})}$·b) $S=\frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{DE})h=\frac{1}{2}h\left(\frac{\overline{AB^2}+\overline{AC^2}}{\overline{BC}}+\overline{BC}\right)=\frac{1}{2}h^2\cdot\frac{\overline{AB^2}+\overline{AC^2}+\overline{BC^2}}{h\cdot\overline{BC}}=$ $=h^2(\overline{AB^2}+\overline{AC^2}+\overline{BC^2})/4s$; $4sS=h^2(\overline{AB^2}+\overline{BC^2}+\overline{CA^2})$. **751.** Fie D, E mijloacele coardelor $\overline{AT}$, $\overline{BT}$. Din triunghiurile dreptunghice OO_1T, OO_2T avem $\overline{OD}=r^2:\overline{OO_1}$; $\overline{OE}=r^2:\overline{OO_2}$; $\overline{DT}=rr_1:\overline{OO_1}$; $\overline{ET}=rr_2:\overline{OO_2}$; $\overline{OO_1^2}=r^2+r_1^2$; $\overline{OO_2^2}=r^2+r_2^2$. a) Patrulaterul inscriptibil $ODTE$ dă $\sphericalangle ODE=\sphericalangle OTE$ și deci $=\sphericalangle OO_2T$, de unde $\Delta ODE\sim\Delta OO_2O_1$, raportul de asemănare fiind $\overline{OD}:\overline{OO_2}=r^2:\overline{OO_1}\cdot\overline{OO_2}=\overline{DE}:\overline{O_1O_2}$. Rezultă $\overline{DE}=r^2(r_1+r_2):\overline{OO_1}\cdot\overline{OO_2}$. Raportul ariilor este $(ODE):(OO_1O_2)=\overline{OD^2}:\overline{OO_2^2}=r^4:(\overline{OO_1}\cdot\overline{OO_2})^2$, deci $(ODE)=$ $=\frac{1}{2}r^5(r_1+r_2):(\overline{OO_1}\cdot\overline{OO_2})^2$. Aria patrulaterului $ODTE$, compus din două triunghiuri dreptunghice, este $(ODTE)=\frac{1}{2}r^3\left(\frac{r_1}{\overline{OO_1^2}}+\frac{r_2}{\overline{OO_2^2}}\right)$. Deducem $(TED)=(ODTE)-(ODE)=\frac{1}{2}r^3r_1r_2(r_1+r_2):$ $:\overline{OO_1^2}\cdot\overline{OO_2^2}$. Dar $(TAB)=4(TED)$ și obținem expresia din enunț. b) $\sphericalangle TMN=\frac{1}{2}$ măs $\frac{\text{arc } AM+\text{arc } MT}{2}=\sphericalangle OO_1T$; la fel $\sphericalangle TNM=$

$=\sphericalangle OO_2T$, deci $\Delta TMN \sim \Delta OO_1O_2$. c) $\Delta ATN \sim \Delta OTO_2$, de unde deducem $\overline{TN}=2r_1r_2:\overline{OO_1}$; analog pentru $\overline{TM}$. d) Distanța de la T la $\overline{AB}$ se poate calcula sau din asemănarea lui TMN și OO_1O_2 pornind de la raportul înălțimilor, sau din TAB căruia îi cunoaștem aria și baza $\overline{AB}=2\overline{DE}$. Obținem $d=2rr_1r_2:\overline{OO_1}\cdot\overline{OO_2}$ (R.M.F. II). **752.** Caz particular al problemei 746. $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}$. **753.** Se va descompune poligonul în triunghiuri avînd un vîrf în M și ca baze laturile poligonului. Suma este $2S:a$, S fiind aria, a latura poligonului. **754.** AF trece prin mijlocul laturii $\overline{DE}$ (probl. 475), deci triunghiurile AFD și AFE au baza comună și înălțimile egale. **755.** Se iau $\overline{CM}=\overline{BC}/3$ (fig. 252), $\overline{CN}=\overline{CD}/3$ **756.** Se va observa că $\overline{AF}:\overline{BF}=\overline{CE}:\overline{AE}$ și că aria $\triangle AFE$: : aria $\triangle BFD=\overline{AF}:\overline{BF}$, aria $\triangle CDE$: aria $\triangle AEF=\overline{CE}:\overline{AE}$. **757.** Se duce $PNQ \parallel AD$ (fig. **253**), care intersectează pe $\overline{AB}$ în P, pe

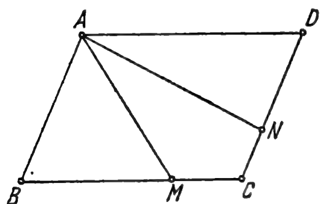


Fig. 252

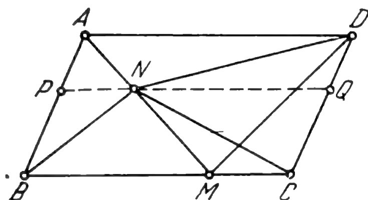


Fig. 253

$\overline{CD}$ în Q. Se va observa, transportînd vîrful N în P, că NAD este jumătate din paralelogramul $APQD$, AMD jumătate din $ABCD$, deci MND este jumătatea lui $BCQP$, întocmai ca BCN. **758.** Fie $A'B'C'$ transversala triunghiului ABC. Avem aria $\triangle AB'C'$: aria $\triangle BC'A'=\overline{AC'}\cdot\overline{C'B'}:\overline{BC'}\cdot\overline{C'A'}$, aria $\triangle BC'A'$: :aria $\triangle CA'B'=\overline{BA'}\cdot\overline{A'C'}:\overline{CA'}\cdot\overline{AB'}$, aria $\triangle CA'B'$: aria $\triangle AB'C'=$ $=\overline{CB'}\cdot\overline{B'A'}:\overline{A'B'}:\overline{B'C'}$. Fie AA', BB', CC' dreptele concurente în O. Avem aria $\Delta COA'$: aria $\Delta BOA'=-\overline{CA'}:\overline{BA'}$, aria $\triangle BOC'$: : aria $\triangle AOC'=-\overline{BC'}:\overline{AC'}$, aria $\triangle AOB'$: aria $\Delta COB'=-\overline{AB'}$: : $\overline{CB}$. Însă aria $\triangle COA'$: aria $\triangle AOC'=\overline{OC}\cdot\overline{OA'}:\overline{OA}\cdot\overline{OC'}$, ... **759.** Se va adăuga de o parte și de alta suma: aria $\triangle CFG$ + + aria $\triangle ADE$ (fig. 254); va trebui deci să se demonstreze că aria $\triangle ACD$ = aria $\triangle BOC$ + aria $\triangle AOD$. Se duce $OP \parallel AD$ pînă ce întîlnește pe CD în P și se va observa că $\triangle OAD$ este echivalent cu $\triangle APD$, $\triangle OBC$ cu $\triangle BPC$. **760.** Aria pentagon $EGOHF=$ + aria patrulater $ECDF$ — aria $\triangle HDC$ — aria $\triangle COG$ = aria $\triangle ADC$ +

+ aria $\triangle BDC$ — aria $\triangle HDC$ — aria $\triangle COG$ = aria $\triangle ADC$ — — aria HDC—aria $\triangle BDC$—aria COG=aria $\triangle AHD$+aria $\triangle DOC$+ + aria $\triangle CBG$ (fig. 255). **761.** Se proiectează A, C în A'', C'' pe Ox

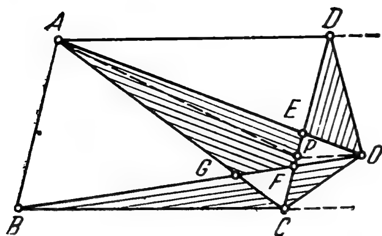


Fig. 254

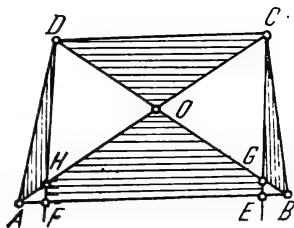


Fig. 255

(fig. 256), AA' și CC'' se întîlnesc D pe BB'; aria $AA''C''C$ = = aria $AA'C'C$. Lăsînd la o parte aria comună ACD, va trebui să se demonstreze că aria $ADCB'$ = aria $ADC''A''$ sau aria $\Delta ADB'$ = = aria $\Delta ADC''$. **762.** Fie A' proiecția lui A pe CB (fig. 257). Din patrulaterele inscriptibile $A\gamma BA'$, $A\beta CA'$ se deduce că $A'\gamma \parallel B\alpha$, $A'\beta \parallel C\alpha$. Adăugînd de o parte și de alta aria $\triangle \alpha QB$ + aria $\triangle \alpha PC$ va trebui să se demonstreze că aria $\triangle \alpha BC$=aria $\triangle \alpha B\gamma$ +aria $\triangle \alpha C\beta$, ceea ce se face transportînd pe β și γ în A'. **763.** $\pi R^2 : 6$. **764.** Fie h_a, h_b, h_c înălțimile

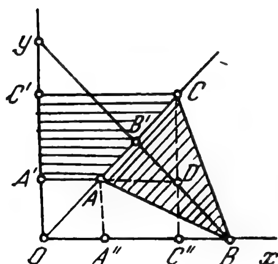


Fig. 256

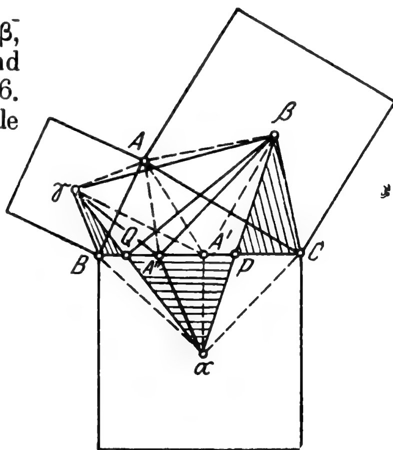


Fig. 257

triunghiului ABC și M_a, M_b, M_c distanțele de la M la $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Avem $h_a : M_a = \overline{AD} : \overline{MD}$ și alte două relații analoge. $M_a = h_a \cdot \dfrac{\overline{MD}}{\overline{AD}}$, $M_b = h_b \dfrac{\overline{ME}}{\overline{BE}}$, $M_c = h_c \dfrac{\overline{MF}}{\overline{CF}}$. În-

țind respectiv cu a, b, c și adunînd, rezultă relația din enunț. **765.** Fie $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$; $\frac{\pi}{2}b^2+\frac{\pi}{2}c^2=\frac{\pi}{2}a^2$, lăsînd la o parte ariile comune, rezultă teorema. **766.** $S=2R^2:3$. **767.** Se va observa că aria $\triangle ABC$: aria $\triangle APC = \overline{BC}:\overline{PC}$, aria $\triangle APC$: :aria $\triangle ADP=\overline{AP}\cdot\overline{PC}:\overline{AD}\cdot\overline{DP}$ (probl. 744); aria $\triangle ADP$: :aria $\triangle ADE=\overline{DP}\cdot\overline{PA}:\overline{DE}\cdot\overline{EA}$, aria $\triangle ADE$: aria $\triangle ABC=\overline{AD}\cdot\overline{AE}$: $:\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ și se va înmulți. **768.** Fie $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$, aria $\triangle ABC=S$; $ax:\alpha=by:\beta=cz:\gamma=2S:(\alpha+\beta+\gamma)$ (x, y, z se numesc coordonate triliniare normale absolute ale punctului M, iar α, β, γ coordonate baricentrice ale lui M). **769.** Fie $\overline{mn}\parallel\overline{BC}$, $\overline{pq}\parallel\overline{CA}$, $\overline{rs}\parallel\overline{AB}$; q, r pe $\overline{BC}$; n, s pe $\overline{CA}$; m, p pe $\overline{AB}$; aria $\triangle ABC$ = = 2 aria $\triangle Amn$=2 aria $\triangle Crs$=2 aria $\triangle Bpq$, deci $\overline{mn}=\overline{Bq}=\overline{Cr}$, $\overline{mb}=\overline{cn}=\overline{Br}=\overline{Cq}$. Aria $\triangle Bpq$: aria $\triangle ABC=1:2=\overline{Bq}^2:\overline{BC}^2$, $\overline{bc}=\overline{mn}-\overline{mb}-\overline{cn}=3\overline{Bq}-2\overline{BC}=(3-2\sqrt{2})\cdot\overline{BC}:\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2.\overline{BC}:\sqrt{2}$, aria Δabc: aria $\triangle ABC=(\sqrt{2}-1):2$ (G.M.I). **770.** Aria $\triangle B'AC'$: :aria $\triangle ABC=m(1-m)$=aria $\triangle C'BA'$:aria $\triangle ABC$=aria $\triangle A'CB'$: :aria $\triangle ABC$. **771.** Aria $\triangle A'B'C'=(3m^2-3m+1)\cdot$ aria $\triangle ABC$. **772.** Se observă că aria $\triangle ABB'$: aria $\triangle ACC'=\overline{AB}\cdot\overline{AB'}:\overline{AC}\cdot\overline{AC'}=1$. AA', BB', CC' întîlnesc laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ în A_1, B_1, C_1. Aria $\triangle BAA'$: aria $\triangle CAA'=-\overline{BA_1}:\overline{CA_1}$, se va deduce $\overline{BA_1}\cdot\overline{CB_1}\times\overline{AC_1}=-\overline{CA_1}\cdot\overline{BC_1}\cdot\overline{AB_1}$. **773.** Fie S aria constantă a triunghiului ABC, d_1, d_2 distanțele punctului fix A la dreptele (Δ_1), (Δ_2) (fig. 258). a) S = aria $\triangle AEC-$ aria $\triangle BEC=\frac{1}{2}[\overline{EC}\cdot d_2-\overline{EC}(d_2-d_1)]=d_1\overline{EC}/2$, care arată că $\overline{EC}$ este constant. La fel b) S=aria $\triangle ABD+$ aria $\triangle BCD=[\overline{BD}\cdot d_1+\overline{BD}(d_2-d_1)]/2=d_2\cdot\overline{BD}/2$

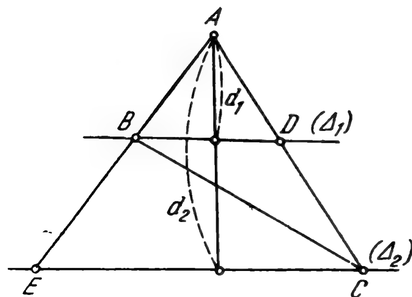


Fig. 258

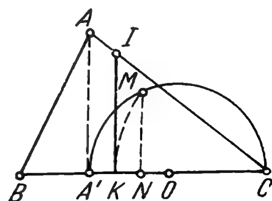


Fig.259

care arată că $\overline{BD}$ este constant. Reciproc, dacă $\overline{EC}$ și $\overline{BD}$ sînt constante, din a) și b) rezultă că S este constant (R.M.T. 1935). **774.** $\overline{B_aC_a}=\alpha=b+c$, $\overline{C_bA_b}=\beta=c+a$, $\overline{A_cB_c}=\gamma=a+b$, $\alpha<\beta+\gamma$, $\alpha+\beta+\gamma=4p$, $S=\sqrt{2p(2p-\alpha)(2p-\beta)(2p-\gamma)}=\sqrt{2pabc}$. **775.** A' fiind proiecția lui A pe $\overline{BC}$ (fig. 259), perpendiculara $\overline{IK}$ se va găsi în triunghiul $AA'C$, căci $b>c$. Va trebui ca $a\cdot\overline{AA'}=2\overline{CK}\cdot\overline{IK}$, $\overline{IK}:\overline{AA'}=\overline{CK}:\overline{CA'}$, $\overline{CK}=\sqrt{a\cdot\overline{CA'}:2}$, $c^2=a^2+b^2-2a\cdot\overline{CA'}$, deci $\overline{CK}=\sqrt{a^2+b^2-c^2}/2$. Construcție: se descrie pe $\overline{CA'}$ ca diametru un semicerc, perpendiculara pe mijlocul lui $\overline{BC}$ îl întîlnește în M, $\overline{CM}=\overline{CK}$. **776.** Fie $\overline{AB}$ latura pătratului înscris în cercul (O), (fig. 260), C mijlocul arcului AB. OC intersectează pe $\overline{AB}$ în D, iar tangenta în A la cerc în E. Triunghiurile OAC, OAD, OAE sînt fiecare a opta parte din octogon, din pătratul înscris și din cel circumscris. Aria $\triangle OAC$: aria $\triangle OAD=\overline{OC}:\overline{OD}$, aria $\triangle OAC$: : aria $\triangle OAE=\overline{OC}:\overline{OE}$, (aria $\triangle OAC)^2$: aria $\triangle OAD$ · aria $\triangle OAE=$ $=\overline{OC}^2:\overline{OD}\cdot\overline{OE}=\overline{OA}^2:\overline{OD}\cdot\overline{OE}=1$. **777.** Fie F piciorul perpendicularei din P pe $\overline{OB}$. Din triunghiurile dreptunghice OPS și OPT, avem $\overline{OP}^2=\overline{OE}\cdot\overline{OS}$, $\overline{OP}^2=\overline{OF}\cdot\overline{OT}$. Făcînd produsul egalităților $\overline{OP}^4=R^4=\overline{OE}\cdot\overline{OF}\cdot\overline{OS}\cdot\overline{OT}=$ (2 aria $\triangle OEP)\cdot$(2 aria $\triangle SOT$). **778.** Se construiește dreptunghiul $CABS$ (fig. 261) și se duce bisectoarea $\overline{AE}$ a unghiului A, mărginită în E la $\overline{MS}$. Se va observa

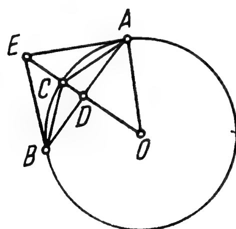


Fig. 260

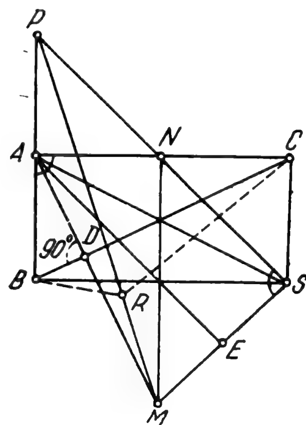


Fig. 261

că $\overline{AS}=\overline{BC}=\overline{AM}$, $\overline{AE}\perp\overline{SM}$, $\overline{BP}=\overline{SB}$, $\overline{AP}=\overline{AN}$, N este pe $\overline{SP}$, $\overline{SP}\perp\overline{SM}$, aria $\triangle MNP=\overline{NP}\cdot\overline{ES}=\overline{AN}\cdot\overline{AP}=(b-c)^2$ (G.M. II). **779.** Aria $\triangle BCR=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{DR}=\frac{1}{2}(b-c)^2$. **780.** Cînd $b=c$.

781. Dreapta căutată intersectează pe $\overline{BC}$ în D (fig. 262), perpendiculara în A pe AB' intersectează pe $\overline{BC}$ în D'; fie ω mijlocul lui $\overline{DD'}$, M al lui $\overline{BC}$. Dacă triunghiurile ABB' și ACC' sînt echivalente, atunci și triunghiurile $D'BB'$, $D'CC'$ sînt echivalente, deci

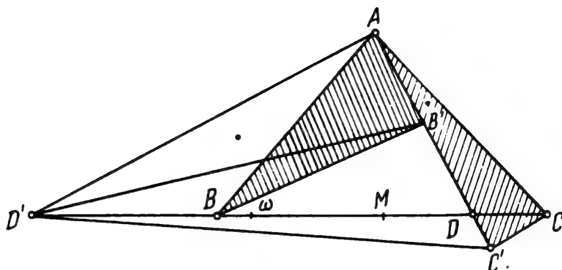


Fig. 262

$\overline{BD'}\cdot\overline{BB'}=\overline{CD'}\cdot\overline{CC'}$ sau $\overline{BD'}\cdot\overline{BD}=\overline{CD'}\cdot\overline{CD}$; însă $\overline{BD'}\cdot\overline{BD}=$ $=(\overline{B\omega}+\overline{\omega D})\cdot(\overline{D\omega}-\overline{\omega B})=\overline{\omega A}^2-\overline{\omega B}^2$, $\overline{CD'}\cdot\overline{CD}=\overline{\omega C}^2-\overline{\omega A}^2$, deci $2\overline{\omega A}^2=\overline{\omega B}^2+\overline{\omega C}^2$ și deoarece $\overline{\omega B}^2+\overline{\omega C}^2=2\overline{\omega M}^2+2\overline{MB}^2$, avem $\overline{\omega A}^2-\overline{\omega M}^2=\overline{MB}^2$. Deci ω se află la intersecția lui $\overline{BC}$ cu o perpendiculară cunoscută pe AM, de aici rezultă și D și D'. **782.** Fie $\overline{AB}=\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=2a$, $\overline{AA'}=h$, $\overline{BB'}=\overline{CC'}=h'$, $\overline{IA'}=r$, $ar+br=ah$, deci $a:r=b:(h-r)=h:\sqrt{(h-r)^2-r^2}=h:\sqrt{h(h-2r)}$, de aici a și b, $bh'=2ah$, deci $h'=2hr:(h-r)$, $R=b^2:(2h)=(h-r)^2:$ $:[2(h-2r)]$, $S=h^2r:\sqrt{h(h-2r)}$. **783.** Se va observa că aria $\triangle ABN$: : aria $\triangle ABC=\overline{AN}:\overline{AC}$, aria $\triangle BCP$: aria $\triangle ABC=\overline{BP}:\overline{AB}$. Se va arăta apoi că $\overline{AN}:\overline{AC}=\overline{BP}:\overline{AB}$ din $\triangle ANB\sim\triangle CNE$ și $\triangle APC\sim\triangle BPD$ (G.M. II). **784.** Aria $\triangle APC$: aria $\triangle ANB=$ $=\overline{AP}\cdot\overline{AC}:\overline{AN}\cdot\overline{AB}$, $\overline{AP}:\overline{AB}=b:(b+c)$, $\overline{AC}:\overline{AN}=(b+c):c$, aria $\triangle ASC$: aria $\triangle ASB=\overline{SC}:\overline{SB}$, însă $\overline{SC}\cdot\overline{NA}\cdot\overline{PB}=\overline{SB}\cdot\overline{NC}\cdot\overline{PA}$, de unde $\overline{SC}:\overline{SB}=b^2:c^2$. Aria $\triangle NOC$: aria $\triangle POB=\overline{ON}\cdot\overline{OC}:$ $:\overline{OP}\cdot\overline{OB}$, însă $\overline{ON}:\overline{OB}=\overline{NC}:c$, $\overline{OC}:\overline{OP}=b:\overline{BP}$, aria $\triangle NOC$: : aria $\Delta POB=(b:c)\ (\overline{NC}:\overline{BP})$, $\overline{NC}:\overline{BP}=b^2:c^2$. **785.** Fie M între B și mijlocul D al laturii $\overline{BC}$ (fig. 263), atunci N se găsește pe $\overline{AC}$. Se va observa că triunghiurile MNC și ACD sînt echivalente, deci $ND\parallel AM$. Construcție: se duce $BE\parallel AC$, $CE\parallel AB$, AE intersectează pe $\overline{BC}$ în D; se duce $DN\parallel AM$, MN este dreapta

căutată. **786.** Fie $\overline{AB'} = \overline{AC''} = \overline{BC} = a$, $\overline{BC'} = \overline{BA''} = \overline{CA} = b$, $\overline{CA'} = \overline{CB''} = \overline{AB} = c$, $S=$ aria $\triangle ABC$, $S_1=$ aria $A'A''C'C''B'B''$. $S_1=$ aria $\triangle AB'C''$ + aria $\triangle AA'A''$ + aria $\triangle BC'A''$ + aria $\triangle BB'B''$ + + aria $\triangle CA'B''$ + aria $\triangle CC'C''$ — $2S$, însă aria $\triangle AB'C''$: $:a^2 =$ aria $\triangle AA'A'' : (b + c)^2 = S : bc$, deci aria $\triangle AB'C''$ + + aria $\triangle AA'A'' = S[a^2 + (b + c)^2] : bc$, $S_1 = S[(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) + 4abc] : abc$. **787.** Aria $\triangle BAD$: aria $\triangle EAC = \overline{BD} : \overline{EC} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} : \overline{AE} \cdot \overline{AC}$, aria $\triangle DAC$: aria $\triangle BAE = \overline{DC} : \overline{BE} = (\overline{AD} \cdot \overline{AC}) : (\overline{AB} \cdot \overline{AE})$ și se înmulțește. **788.** Fie B', C' proiecțiile lui B, C pe Ax, B'', C'' pe Ay. $\overline{BB'} = b$, $\overline{BB''} = b'$, $\overline{CC'} = c$, $\overline{CC''} = c'$. Aria $\triangle ABC =$ aria $BB''C''C$ — aria $\triangle ABB''$ — — aria $\triangle ACC'' = \frac{1}{2}(bc' + cb')$. **789.** Aria $\triangle MAC$ + aria $\triangle MBD = (\overline{MA} \cdot \overline{MC} + \overline{MB} \cdot \overline{MD}) : 2$, însă $\overline{MB} \cdot \overline{MA} = \overline{MC} \cdot \overline{MD} =$ const, deci $\overline{MA} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{MB} \cdot \overline{MD} =$ const, aria $\triangle MAC$ + aria $\triangle MBD$ este minimă cînd $\overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$, se deduce $\overline{MA} = \overline{MD}$, $\overline{MB} = \overline{MC}$, coardele fac cîte un unghi de 45° cu $\overline{OM}$. **790.** Aria $\Delta OAC =$ aria ΔOBC, va trebui deci ca $\overline{AP} = 2\overline{AC}$, însă $\overline{OP} : \overline{OA} = \overline{CP} : \overline{CA} = 3$, căci OC este bisectoarea exterioară a unghiului AOP, deci $\overline{OP} = 3R$, R fiind raza $\overline{OA}$; $\overline{AP} = 2R\sqrt{2}$. **791.** Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ale paralelogramului dat, ale cărui diagonale se întîlnesc în O (fig. 264). Medianele $\overline{CM}$, $\overline{AN}$ ale triunghiului ABC se întîlnesc în B'

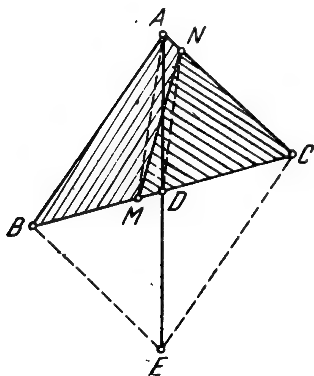


Fig. 263

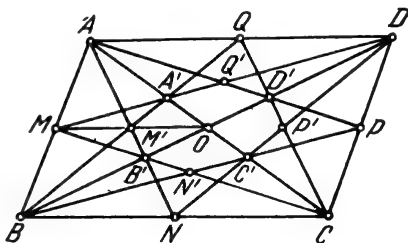


Fig. 264

pe mediana $\overline{OB}$. Vom avea apoi cîte un vîrf al octogonului pe $\overline{OA}$ în A', pe $\overline{OC}$ în C', pe $\overline{OD}$ în D'. Dreptele AN, BQ se intersectează în M' la mijlocul lui $\overline{OM}$. Vom avea apoi N' la mijlocul lui $\overline{ON}$,

P' la mijlocul lui $\overline{OP}$, Q' la mijlocul lui $\overline{OQ}$. Octogonul este $A'M'B'N'C'P'D'Q'$. Se va observa că aria $OA'M'$: aria $\triangle OAM = \overline{OA'} \cdot \overline{OM'} : \overline{OA} \cdot \overline{OM} = 1 : 6$, deci octogonul este a șasea parte din paralelogram. **792.** Aria $\triangle O\alpha\beta$: aria $\triangle OAB = \overline{O\alpha} \cdot \overline{O\beta} : \overline{OA} \cdot \overline{OB}$, însă $\overline{O\alpha} : \overline{OA} = 1 + 2\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, $\overline{O\beta} : \overline{OB} = 1 + 2\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$, deci

aria $\triangle O\alpha\beta$: aria $\triangle OAB = 1 + 2\left(\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} + \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\right) + 4\left(\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} \cdot \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\right)$.

Se va observa că $\overline{OA'} : \overline{OA} =$ aria $\triangle OBA'$: aria $\triangle OAB$, $\overline{OB'} : \overline{OB} =$

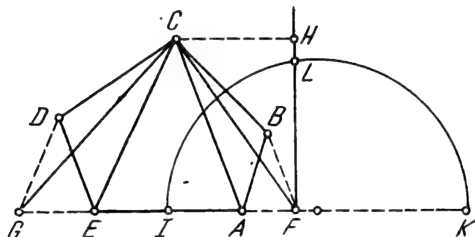


Fig. 265

$=$ aria $\triangle OAB'$: aria $\triangle OAB$, $\overline{OA'} \cdot \overline{OB'} : \overline{OA} \cdot \overline{OB} =$ aria $\triangle OA'B'$: aria $\triangle OAB$, deci aria $\triangle O\alpha\beta =$ aria $\triangle OAB + 2$ (aria $\triangle OBA' +$ aria $\triangle OAB'$) $+ 4$ aria $\triangle OA'B'$, analog pentru $O\beta\gamma$, $O\gamma\alpha$. Cale analogă pentru a doua relație. **793.** Perimetrul este $2a\sqrt{3}(\pi + 6) : 9$, aria este $a^2(\pi + 3\sqrt{3}) : 9$. **794.** Paralela BB' la diagonala AC', paralela EE' la diagonala AD intersectează pe CD în B', E'. $AB'E'$ este triunghiul căutat. **795.** Se duce $BF \parallel CA$, $DG \parallel CE$, întîlnind pe AE în F și G (fig. 265). Triunghiul FCG este echivalent cu pentagonul. Fie I mijlocul lui $\overline{FG}$. Se duce $CH \parallel FG$, $FH \perp CH$; pe prelungirea lui $\overline{GF}$ se ia $\overline{FK} = \overline{FH}$. Se descrie pe $\overline{IK}$ ca diametru un semicerc, care intersectează pe $\overline{FH}$ în L; $\overline{FL}$ este latura pătratului căutat, căci $\overline{FL}^2 = \overline{IF} \cdot \overline{KF} = \overline{IF} \cdot \overline{FH} =$ aria $\triangle FCG$. **796.** Se va transforma triunghiul dat într-un triunghi echilateral echivalent. Se duce $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$ și $\overline{AD}$ așa ca $\sphericalangle DAC = 60°$; se ia pe $\overline{AD}$ și $\overline{AC}$, $\overline{AH} = \overline{AK} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{AD}}$. Se va transforma triunghiul echilateral AHK într-un hexagon regulat echivalent: fie O centrul triunghiului echilateral AHK, I proiecția lui O pe $\overline{HK}$; se ia pe $\overline{OH}$ și $\overline{OI}$, $\overline{OM} = \overline{ON} = \sqrt{\overline{OH} \cdot \overline{OI}}$, se obține triunghiul OMN care este echilateral și echivalent cu triunghiul OHI. Plecînd de la triunghiuri analoge cu triunghiul OHI, se găsesc

alte triunghiuri OMN, care formează hexagonul regulat echivalent cu triunghiul AHK sau cu triunghiul ABC. Fie J proiecția lui O pe MN, hexagonul se descompune în 12 triunghiuri egale cu triunghiul OMJ. Se ia pe $\overline{OJ}$ și $\overline{OM}$, $\overline{OR}=\overline{OS}=\sqrt{\overline{OJ}\cdot\overline{OM}}$. Vor fi 12 triunghiuri isoscele și egale cu triunghiul ORS, care vor forma dodecagonul regulat căutat. **797.** Fie $\overline{AB}$ o latură a dodecagonului. Coarda $\overline{AC}$, perpendiculară în D pe $\overline{OB}$, este latura hexagonului. Aria $\triangle OAB=\overline{OB}\cdot\overline{AD}:2=R^2:4$, deci aria cerută este $3R^2$. **798.** Centrul de rotație se găsește la intersecția perpendicularelor ridicate pe mijlocul segmentelor $\overline{OA}$ și $\overline{BD}$, adică în vîrful F al hexagonului (fig. 266). Arcul descris din F ca centru. cu $\overline{FA}$ ca rază, întîlnește dreapta FB în G și dreapta FD în H. Aria cerută este mărginită de AB, de arcul BD descris din F ca centru, cu $\overline{FB}$, ca rază, de DO și de arcul OGA. Avem aria $ABDOGA=$ aria $BGHD=\pi R^2:3$. **799.** Fie d distanța dintre paralele, S aria triunghiului și I intersecția paralelei duse prin A la cele două paralele date, cu $\overline{BC}$. Se observă că $d\cdot\overline{AI}=2S$ și deci I este fix (G.M. XXI). **800.** a) Se arată că aria trapezului este $2S_{ABM}$ (M mijlocul lui $\overline{DC}$), deci M descrie o paralelă la $\overline{AB}$. b) Se ia triunghiul ABN echivalent cu trapezul. N descrie o paralelă la $\overline{AB}$, deci și M mijlocul lui $\overline{AN}$ descrie o paralelă la $\overline{AB}$. **801.** a) Fie A_1 și S picioarele perpendicularelor duse din A și P pe latura $\overline{BC}$ și D intersecția dreptei AM cu cercul ABC. Dreapta lui Simson RSQ a punctului P este perpendiculară pe AM (probl. 269). Avem $\sphericalangle MAA_1=\sphericalangle RSB=\sphericalangle RPB$. Triunghiurile dreptunghice MAA_1 și BPR sînt deci asemenea și avem $\overline{AA_1}:\overline{AM}=\overline{PR}:\overline{PB}$. Se demonstrează apoi prin egalități de unghiuri că și triunghiurile PRQ și PBC sînt asemenea. Se deduce $\overline{QR}:\overline{BC}=\overline{PR}:\overline{PB}$. Deci, avem și $\overline{BC}\cdot\overline{AA_1}=\overline{AM}\cdot\overline{QR}$. b) Patrulaterul $AQMR$ avînd diagonalele sale perpendiculare, rezultă că aria sa este echivalentă cu a triunghiului ABC, căci este egală cu $\overline{AM}\cdot\overline{QR}:2$. Se scade de o parte și de alta partea comună $AQMB$ și se găsește că ariile MCQ și MBR sînt echivalente (G.M. XXVIII). **802.** Avem aria $ABA'B'=$ aria $\Delta MAB+$ $+$ aria $\Delta MBA'+$ aria $\Delta MA'B'+$ aria $\Delta MB'A$ și relația dată se

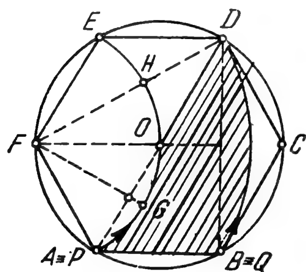


Fig. 266

poate scrie aria $\triangle MAB +$ aria $\triangle MA'B' =$ (aria $ABA'B')/2$. Fie α mijlocul lui $\overline{AA'}$ și β mijlocul lui $\overline{BB'}$. Avem aria $\triangle \alpha AB =$ $=$ aria $\triangle \alpha BA'$, aria $\triangle \alpha A'B' =$ aria $\triangle \alpha B'A$ și adunînd parte cu parte, se poate deduce că α aparține locului. De asemenea și β este un punct al locului. Din aria $\triangle \alpha AB +$ aria $\triangle \alpha A'B' =$ (aria $ABA'B')/2$ deducem aria $\triangle MAB +$ aria $\triangle MA'B' =$ aria $\triangle \alpha AB +$ aria $\triangle \alpha A'B'$ sau aria $\triangle MAB -$ aria $\triangle \alpha AB +$ aria $\triangle MA'B' -$ aria $\triangle \alpha A'B' = 0$. Dar aria $\triangle MAB =$ aria $\triangle \alpha MA$ + aria $\triangle \alpha AB$ + aria $\triangle \alpha BM$; aria $\triangle MA'B' =$ aria $\triangle \alpha MA' +$ aria $\triangle \alpha A'B' +$ aria $\triangle \alpha B'M$. Rezultă aria $\triangle \alpha MA +$ aria $\triangle \alpha BM$ + aria $\triangle \alpha MA' +$ aria $\triangle \alpha B'M = 0$. Triunghiurile αBM, $\alpha B'M$ avînd aceeași bază $\overline{\alpha M}$, pentru a avea suma ariilor nulă este necesar ca $\overline{\alpha M}$ să treacă prin mijlocul β al lui $\overline{BB'}$; α fiind mijlocul lui $\overline{AA'}$, suma aria $\triangle \alpha MA +$ aria $\triangle \alpha MA'$ este nulă. Locul căutat este deci dreapta $\alpha\beta$. **803.** Fie C și C' punctele de întîlnire a dreptelor AB, $A'B'$ și a dreptelor AB', BA', iar γ mijlocul lui $\overline{CC'}$. Pentru a dovedi că γ aparține dreptei $\alpha\beta$, va fi suficient să dovedim că γ aparține locului problemei precedente. Avem aria $\triangle \gamma AB$ = aria $\triangle C\gamma A$ + aria $\triangle CAB$ + aria $\triangle CB\gamma$ și aria $\triangle \gamma A'B'$ = aria $\triangle C\gamma A'$ + aria $\triangle CA'B'$ + aria $\triangle CB'\gamma$; adunînd parte cu parte și observînd că aria $\triangle CAB$, aria $\triangle CA'B'$ sînt nule, obținem (1) aria $\triangle \gamma AB$ + aria $\triangle \gamma A'B'$ = aria $\Delta C\gamma A +$ $+$ aria $\triangle CB\gamma$ + aria $\triangle C\gamma A'$ + aria $\triangle CVB'\gamma$. De asemenea, adunînd parte cu parte egalitățile aria $\triangle \gamma BA'$ = aria $\triangle C'\gamma B +$ $+$ aria $\triangle C'BA'$ + aria $\triangle C'A'\gamma$ și aria $\triangle \gamma B'A$ = aria $\triangle C'\gamma B' +$ $+$ aria $\triangle C'B'A$ + aria $\triangle C'A\gamma$, obținem (2) aria $\triangle \gamma BA'$ + $+$ aria $\triangle \gamma B'A$ = aria $\triangle C'\gamma B$ + aria $\triangle C'A'\gamma +$ aria $\triangle C'\gamma B'$ + $+$ aria $\triangle C'A\gamma$. Dar aria $\triangle C\gamma A$ = aria $\triangle C'A\gamma$, aria $\triangle CB\gamma =$ $=$ aria $\triangle C'\gamma B$, aria $\triangle C\gamma A'$ = aria $\triangle C'A'\gamma$, aria $\triangle CB'\gamma =$ $=$ aria $\triangle C'\gamma B'$ și din (1) și (2) deducem aria $\triangle \gamma AB$ + aria $\triangle \gamma A'B' =$ $=$ aria $\triangle \gamma BA'$ + aria $\triangle \gamma B'A$, ceea ce trebuie demonstrat. Dreapta $\alpha\beta\gamma$ este de asemenea locul punctelor M astfel ca să avem una din egalitățile aria $\triangle MBC$ + aria $\triangle MB'C'$ = aria $\triangle MCB'$ + $+$ aria $\triangle MC'B$; aria $\triangle MCA$ + aria $\triangle MC'A$ = aria $\triangle MAC$ + $+$ aria $\triangle MA'C$. **804.** a) Fie S_1 aria constantă a celor trei dreptunghiuri și S dublul ariei triunghiului ABC, A_h piciorul înălțimii din A. Avem $k = S_1 : S = \overline{C''A_1} \cdot \overline{C''B''} : \overline{AA_h} \cdot \overline{BC} = \overline{C''B} \cdot \overline{AC''} :$ $: \overline{AB}^2 = \overline{C''A} \cdot \overline{C''B} : \overline{AB}^2$. Deci $\overline{C''A} \cdot \overline{C''B} = k\overline{AB}^2$ și analog $\overline{C'A} \cdot \overline{C'B} = k\overline{AB}^2$. $\overline{C'A} = \overline{C''B}$, segmentele $\overline{A'A''}$, $\overline{B'B''}$, $\overline{C'C''}$ au mijloacele lor în mijloacele segmentelor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Cele trei drepte sînt concurente în O, centrul cercului circumscris. b) Fie

O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $AC'B''$, $BA'C''$, $CB'A''$. Triunghiurile ABC, $O_1O_2O_3$ sînt omotetice și au centrul de omotetie în O. Pentru a arăta aceasta se va dovedi mai întîi că dreptele $C'B''$, $A'C''$, $B'A''$ sînt paralele cu laturile BC, CA, AB. Rezultă că perpendicularele pe mijloacele segmentelor $\overline{A'C''}$, $\overline{B'A''}$, $\overline{C'B''}$ trec prin ortocentrul triunghiului $O_1O_2O_3$. c) Fie M_a intersecția dreptelor $A''C'$, $A'B''$; M_b, M_c puncte analoge. Triunghiurile ABC, $M_aM_bM_c$ sînt omotetice, centrul de omotetie fiind centrul lor de greutate comun G. Dreptele $B'C''$, M_bM_c se intersectează în părți egale și cele trei perpendiculare de la punctul c) sînt mediatoarele triunghiului $M_aM_bM_c$ și trec prin centrul cercului său circumscris. d) Fie I_1 punctul de întîlnire a dreptelor $C'B_2$, $B''C$, punct situat pe AH, iar P_1 mijlocul segmentului $\overline{AI_1}$; I_2, I_3, P_2, P_3 puncte analoge. Triunghiurile ABC, $P_1P_2P_3$ sînt omotetice și au centrul de omotetie în H. Perpendicularele pe mijloacele segmentului $\overline{A_1C_2}$, $\overline{B_1A_2}$, $\overline{C_1B_2}$ trec prin vîrfurile P_1, P_2, P_3 și se întîlnesc în omologul centrului cercului celor nouă puncte în raport cu $P_1P_2P_3$. e) Cele patru puncte se găsesc pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC (G.M.XXXIII).

XIV. **805.** $\pi\overline{AM}+\pi\overline{MN}+\pi\overline{NB}=\pi(\overline{AM}+\overline{MN}+\overline{NB})=\pi\overline{AB}$. Analog pentru cazul general. În cazul unei linii poligonale: suma lungimilor cercurilor descrise pe laturi ca diametre este egală cu lungimea cercului care ar avea perimetrul ca diametru. **806.** Fie α și β unghiurile la centru, în radiani; lungimile arcelor sînt $r_1\alpha$ și $r_2\beta$ şi fiind egale, rezultă proprietatea. **807.** Fie O_1, O_2,... centrele cercurilor care au pe $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$,... drept coarde și ω_1, ω_2, ... centrele cercurilor care au pe

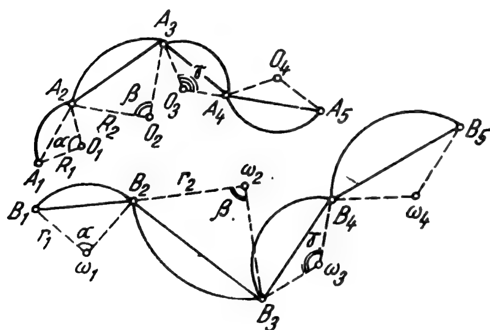


Fig. 267

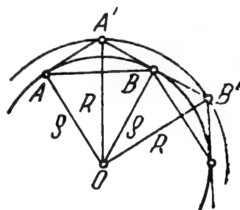


Fig. 268

$\overline{B_1B_2}$, B_2B_3, ... drept coarde (fig. 267). Triunghiurile isoscele $A_1O_1A_2$, $B_1\omega_1B_2$ sînt asemenea, avînd acelaşi unghi α; analog pentru celelalte perechi; rezultă pentru razele celor două serii de cercuri

$R_1 : r_1 = R_2 : r_2 = \dots = R_n : r_n$. Amplificînd cu α, β, ... și făcînd suma numărătorilor pe suma numitorilor, se obține proprietatea. **808.** π. **809.** $\frac{1}{6}\pi p_{12}\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **810.** Fie $\overline{AB}$ latura poligonului înscris și $\overline{A'B'}$ a celui circumscris (fig. 268); r raza cercului înscris poligonului interior, R raza cercului circumscris celui exterior, ρ raza cercului dat. Avem $R = \overline{OA'}$, $\rho = \overline{OA}$, r = apotema poligonului cu latura $\overline{AB}$. $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$, de unde $\rho = \sqrt{Rr}$. **811.** Fie O (fig. 269) centrul cercului exterior, O_1 și O_2 ale cercu-

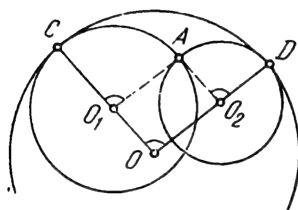


Fig. 269

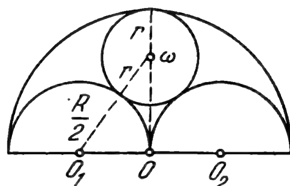


Fig. 270

rilor tangente interior, A punctul de intersecție mai apropiat de cercul mare, C, D punctele de tangență pe cercul mare. Se va observa că OO_1AO_2 este paralelogram, de unde rezultă $\sphericalangle COD = \sphericalangle CO_1A = \sphericalangle AO_2D$. **812.** Fie O centrul semicercului mare, O_1 și O_2 ale semicercurilor egale, ω al cercului tangent celor trei cercuri (fig. 270). Din triunghiul dreptunghic ωOO_1 deducem, notînd cu R raza cercului mare și r a cercului mic, $(R-r)^2 + \frac{R^2}{4} = \left(\frac{R}{2} + r\right)^2$, de unde $r = \frac{R}{3}$. **813.** Dacă α este unghiul la centru, în radiani, aria sectorului este $A = \frac{1}{2}R^2\alpha = \frac{1}{2}Rl$, l fiind lungimea arcului. **814.** Avem $\frac{1}{2}R_1^2\alpha_1 = \frac{1}{2}R_2^2\alpha_2$, deci $\alpha_1 : \alpha_2 = R_2^2 : R_1^2$. **815.** $\frac{R^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$. **816.** $R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$. **817.** Fie β, γ unghiurile celor două sectoare și R_1, R_2 razele cercurilor. Presupunem $R_1 > R_2$; rezultă din condițiile enunțului $\beta = \alpha(R^2 - R_2^2) : (R_1^2 - R_2^2)$ și $\gamma = \alpha(R_1^2 - R^2) : (R_1^2 - R_2^2)$. Trebuie ca $R_2 < R < R_1$. **818.** Notăm $\overline{AC} = m$, $\overline{CB} = n$, deci $\overline{AB} = m + n$ și $\overline{CD}^2 = mn$. Aria cuprinsă între

semicercuri este $\frac{\pi}{8}(m+n)^2-\frac{\pi}{8}m^2-\frac{\pi}{8}n^2=\frac{\pi}{4}mn=\frac{\pi}{4}\overline{CD^2}$.

819. $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. Se va observa că aria celor patru semicercuri este egală cu aria pătratului plus aria celor patru frunze (fig. 271). **820.** Aria se compune din aria pătratului rectiliniu $MNPQ$ (fig.272)

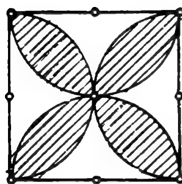


Fig. 271

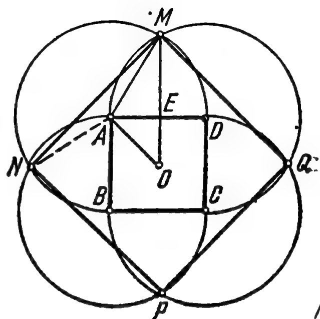


Fig. 272

și din patru segmente de cerc. $ABCD$ este pătratul dat, cu centrul O, iar E mijlocul lui $\overline{AD}$. Avem $\overline{MN}=\overline{OM}\sqrt{2}$, iar din triunghiul OAM, $\overline{AM}^2=\overline{OA}^2+\overline{OM}^2-2\overline{OM}\cdot\overline{OE}$, adică $\overline{OM}^2-a\cdot\overline{OM}-$ $-\frac{a^2}{2}=0$, de unde $\overline{MN}=a\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ = latura dodecagonului stelat. Rezultă $\sphericalangle\, MAN=150°=\frac{5\pi}{6}$; aria sectorului este $A_1=\frac{5\pi}{12}R^2$. Aria $\triangle MAN$ se calculează observînd că înălțimea din A este jumătate din latura dodecagonului convex, deci $A_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\times$ $\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})=\frac{1}{4}a^2$. Aria unui segment de cerc este $\frac{a^2}{4}\left(\frac{5\pi}{3}-1\right)$. De aici rezultă aria cerută care este $a^2\left(1+\sqrt{3}+\frac{5\pi}{3}\right)$.

821. Pătratele razelor date, împreună cu razele cercurilor intermediare, trebuie să formeze o progresie aritmetică. Dacă r și R sînt razele cercurilor date, rația progresiei este $k=(R^2-r^2)/3$. În general $k=(R^2-r^2)/n$. **822.** πab. Se scrie puterea punctului C față de cerc, dată de coarda $\overline{AB}$ și apoi de diametrul care trece

prin C. **823.** Figura mixtilinie $BGHD$ și sectorul au ca parte comună segementul închis de coarda $\overline{BD}$, deci trebuie arătat că trapezul $BGHD$ și triunghiul OBD sînt echivalente (fig. 273). Fie E mijlocul coardei $\overline{BD}$. Se mişcă vîrful O paralel cu $\overline{BD}$ pînă vine în O_1 pe paralela prin E la $\overline{BG}$; $\overline{OO_1}$ și OE sînt bisectoarele unghiurilor drepte, deci O_1 și E sînt simetrice față de OC. Triunghiul OBD este echivalent cu triunghiul O_1BD, iar acesta cu $BGHD$.

Fig. 273

824. Se duce $\overline{O'K} \parallel \overline{AA'}$, care întîlneşte în K pe $\overline{OA}$. Avem $\overline{OO'} = 2\,\overline{OK}$, deci $\sphericalangle AOC = 60°$ (probl. 74), aria $AOO'A' = 4R^2 \cdot \sqrt{3} : 9$, deci aria $\triangle ACA' = R^2(24\sqrt{3} - 11\pi) : 54$. **825.** Razele formează o progresie cu rația $\frac{R_2}{R_1} = k < 1$. Ariile vor forma tot o progresie nelimitată, a cărei sumă S se poate scrie $S = \sum_{n=1}^{\infty} A_i = \pi(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + \ldots) = \pi R_1^2 (1 + k^2 + k^4 + \ldots) = \pi R_1^2 \cdot \frac{1}{1-k^2}$. Notînd cu C_1 și C_2 centrele primelor două cercuri și $OC_1 = d$ se va observa, pe o figură făcută sumar, că $\frac{R_2}{R_1} = \frac{\overline{OC_2}}{\overline{OC_1}} = \frac{d - R_1 - R_2}{d} = k$, de unde se deduce $k = \frac{d - R_1}{d + R_1}$ și $S = \pi R_1 \frac{(d + R_1)^2}{4d}$.

XV. **826.** Se construiește întîi segmentul $y = a_2a_3/b_2$ ca al patrulea proporțional (fig. 274); apoi se construiește $x = a_1y/b_1$. Analog

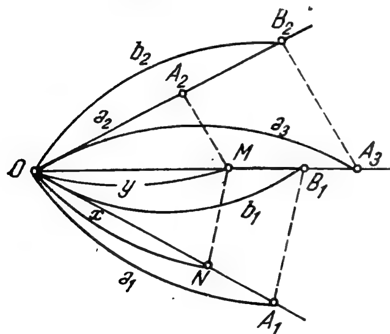


Fig. 274

Fig. 275

pentru cazul general, se începe cu $y_{n-1}=a_{n-1}a_n/b_{n-1}$ etc. **827.** Se poate proceda ca la problema precedentă, construind întîi $y = ab/c$ (fig. 275), apoi $x = by/c$. *Altfel.* Se construiește triunghiul dreptunghic ABC, cu catetele $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ și înălțimea $\overline{AD}$, apoi se așază segmentul $\overline{B'D'} = a$ cu B' pe $\overline{AB}$, D' pe $\overline{AD}$ și $\overline{B'D'} \parallel \overline{BC}$; $\overline{B'D'}$ prelungit intersectează pe $\overline{AC}$, în C', astfel că $\overline{D'C'} = x$. **828.** Se pot folosi teorema înălțimii sau a catetei din triunghiul dreptunghic sau puterea punctului față de cerc. Toate construcțiile se pot face pe același desen, ca în fig. 276. Pentru verificare trebuie ca $\overline{DC} = \overline{DC'} = \overline{DC''}$. **829.** Se construiește $y = \sqrt{ab} = \overline{OE}$ (fig. 277) $z = \sqrt{cd} = \overline{OF}$, apoi $x = \sqrt{yz} = \overline{OM}$. **830.** Se construiește dintr-un

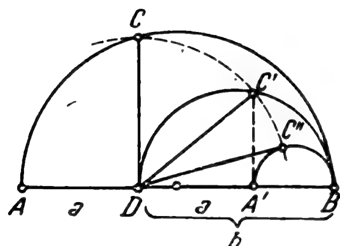


Fig. 276

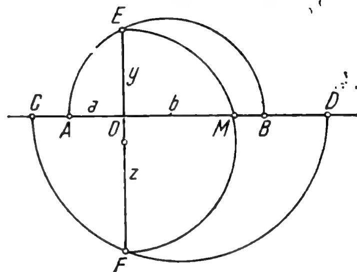


Fig. 277

triunghi dreptunghic $c = \sqrt{a^2-b^2}$, apoi $x = ab/c$ ca al patrulea proporțional. **831.** Cu ajutorul triunghiurilor dreptunghice (fig. 278) se construiește $y = \sqrt{a^2 + b^2}$, apoi $x = \sqrt{y^2+c^2}$. Dacă se ia $a=b= = c ... = 1$, se obține rădăcina pătrată a oricărui număr natural.

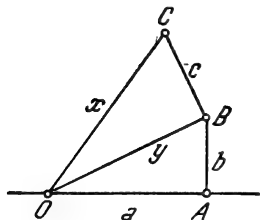


Fig. 278

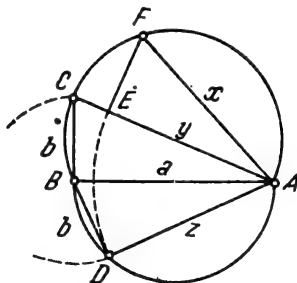


Fig. 279

832. Se scrie $x = \sqrt[4]{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}$ și se pune $a^2 + b^2 = y^2$ și $a^2 - b^2 = z^2$; y și z se determină din triunghiurile dreptunghice ABC, ABD (fig. 279). Apoi se construiește $x = \sqrt[4]{y^2z^2} = \sqrt{yz} = \overline{AF}$. **833.** Se poate scrie $x = \sqrt[4]{(a^2+b^2+ab\sqrt{2})(a^2+b^2-ab\sqrt{2})}$. Seg-

mentele $y = \sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$ și $z = \sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}$ se pot construi din triunghiul cu laturile a, b și unghiul cuprins între ele de 135° și din triunghiul cu aceleași laturi, dar cu unghiul de 45° (fig. 280); apoi $x = \sqrt{yz} = \sqrt{\overline{AE} \cdot \overline{AC}} = \overline{AF}$. **834.** Se construiește întîi $y = \sqrt[4]{a^4+b^4}$, apoi $x = \sqrt[4]{y^4-c^4}$.

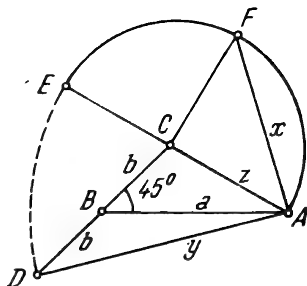
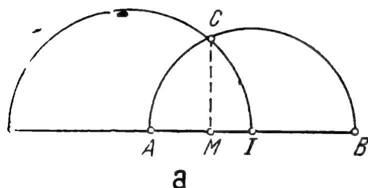


Fig. 280

835. *Soluția I.* Se ia pe o dreaptă $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, în același sens. Fie I mijlocul lui AB (fig. 281, a); cercurile de diametre $\overline{OI}$ și $\overline{AB}$ se intersectează în C, care se proiectează pe OAB în M. $\overline{OM}$ este segmentul cerut. *Soluția II.* Aceleași notații. Se construiește conjugatul lui O față de A și B ca în problema 433. *Soluția III.* Se construiește un trapez oarecare cu bazele a, b (fig. 281, b). Segmentul $\overline{EF}$ care trece prin intersecția diagonalelor, paralel cu bazele, mărginit la laturile



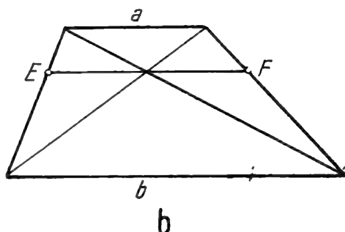


Fig. 281

neparalelele, răspunde la problemă (probl. 525). **836.** Se construiește un trapez cu o bază $\overline{AD} = a$, iar pe baza cealaltă $\overline{BC} = b$ se poartă segmentele $\overline{BC_1} = c$ etc. (fig. 282). Construcția ca în figură.

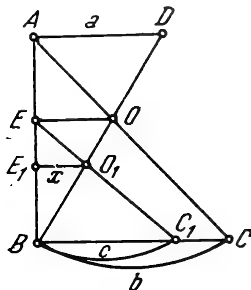


Fig. 282

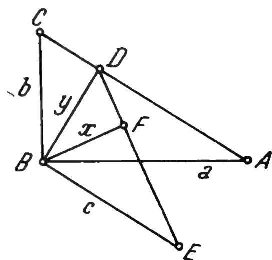
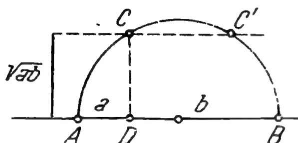


Fig. 283

837. Se construieşte întîi $\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ din triunghiul dreptunghic cu catetele $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, în care $y = \overline{BD}$ este înălțimea (fig. 283); apoi se repetă construcția pentru $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{c^2}$; $x=\overline{BF}$.

838. Se construiește un cerc cu diametrul $\overline{AB}$ cît suma dată, apoi se duce o paralelă la diametru, la distanță egală cu media geometrică a segmentelor (fig. 284); aceasta intersectează cercul în C și C'. Proiecția D a lui C pe $\overline{AB}$ ne dă $\overline{AD} = a$, $\overline{DB} = b$ segmentele căutate. Pentru cazul al doilea se construiește un cerc cu diametrul $\overline{TT'}$ cît diferența dată, apoi pe tangenta în T se poartă $\overline{TA}$=media geometrică a celor două segmente. Diametrul care trece prin A intersectează cercul în M și N. $\overline{AM}$ și $\overline{AN}$ sînt segmentele cerute.



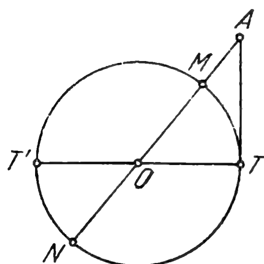


Fig. 284

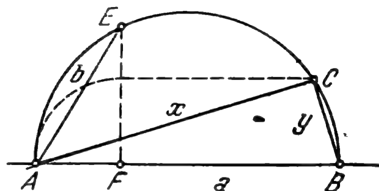


Fig. 285

839. Trebuie construit triunghiul dreptunghic cu catetele x, y, cunoscînd lungimea a a ipotenuzei și aria $b^2/2$ (fig. 285). Se știe că $xy=ah=b^2$, h fiind înălțimea, deci se poate construi $h=\overline{AF}$ din triunghiul dreptunghic cu ipotenuza $\overline{AB} = a$ și cateta $\overline{AE} = b$; F proiecția lui E pe $\overline{AB}$. Apoi se duce la distanța $h = \overline{AF}$ paralela la $\overline{AB}$ pînă intersectează cercul de diametru $\overline{AB}$ în C; $\overline{AC} = x$ și $\overline{BC} = y$. **840.** Problema se reduce la precedenta, deoarece notînd cu x_1, x_2 rădăcinile, avem $x_1^2 + x_2^2 = 4a^2$, $x_1x_2 = a^2$.

XVI. **841.** Planele determinate de M cu dreapta (D) și de M cu (D') se intersectează după o dreaptă (Δ), care intersectează pe (D) și (D'). Dacă (D) și (D'), nu sînt situate în același plan, se poate întîmpla ca (Δ) să fie paralelă cu (D) sau (D'), nu însă cu amîndouă. Dacă (D) și (D') sînt situate în același plan și se întîlnesc în A

și dacă M nu este în planul lor, MA este dreapta cerută; dacă M se află în planul dreptelor, orice dreaptă care trece prin M intersectează pe (D) și (D'). Dacă $(D) \| (D')$ și M nu este în planul lor, nu există nici o dreaptă care să le întîlnească [paralela la (D) și (D') dusă prin M se poate privi ca întîlnindu-le la infinit]. *Altfel:* (D) și M determină un plan care este intersectat de (D') în punctul A (fig. 286). MA este dreapta căutată. **842.** Se ia un punct

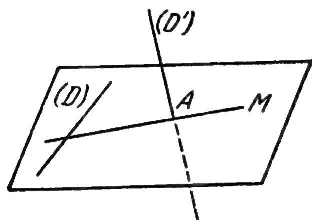


Fig. 286

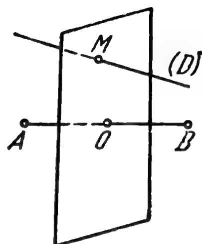


Fig. 287

oarecare pe una din ele; prin el se poate duce o dreaptă care să întîlnească pe celelalte două. Se pot ușor studia cazurile: cînd cele trei drepte se întîlnesc într-un punct, fără a fi în același plan, cînd nu sînt situate în același plan, cînd două din drepte sînt paralele, cînd cele trei drepte sînt paralele, fără ca toate trei să fie în același plan. **843.** 4 plane. **844.** După 6 drepte. **845.** Planul perpendicular pe $\overline{AB}$ prin mijlocul său C (planul mediator), căci dacă M este un punct al planului, $\overline{MC} \perp \overline{AB}$. **846.** O dreaptă: intersecția lui (P) cu planul mediator al lui $\overline{AB}$. **847.** Punctul căutat este la intersecția dreptei date cu planul mediator al lui $\overline{AB}$ (fig. 287). **848.** Fie O centrul cercului ABC; locul este perpendiculara în O pe planul ABC. **849.** Punctele egal depărtate de B, C, D se găsesc pe o dreaptă (Δ), perpendiculară pe planul BCD; punctele egal depărtate de A și B se găsesc pe planul mediator (P) al lui AB [$(P) \perp \overline{AB}$ trecînd prin mijlocul său]. (P) și (Δ) se întîlnesc în O, căci dacă ar fi paralele, $\overline{AB}$ ar fi în planul BCD, contrar ipotezei. **850.** Punctul căutat se află la intersecția planului (P) cu dreapta loc geometric al punctelor egal depărtate de A, B, C (probl. 848). **581.** Fie C proiecția lui O pe (P), M proiecția lui O pe o dreaptă (D) (fig. 288); $CM \perp (D)$ în virtutea teoremei celor trei perpendi-

culare, deci $CM \perp AB$. Locul este o dreaptă. **852.** Fie ω proiecția lui O pe (P), M proiecția lui O pe (D) (fig. 289). $\omega M \perp (D)$, locul lui M este cercul descris pe $\overline{A\omega}$ ca diametru, în planul (P). **853.** Un cerc situat în planul perpendicular pe $\overline{AB}$, în A. **854.** Fie B' simetricul lui B în raport cu (P); $\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AM}+\overline{MB'}$ va fi cea mai mică, atunci cînd A, M, B' vor fi coliniare. **855.** Se duce prin B un plan $(P) \perp (D)$ care intersectează dreapta în O. În P se descrie un cerc avînd O ca centru și trecînd prin B. Planul Q determinat de A și D intersectează acest cerc în B' și B''. $\overline{AM}+$ $+\overline{MB}=\overline{AM}+\overline{MB'}=\overline{AM}+\overline{MB''}$. Problema s-a redus la probl 43. **856.** Un plan perpendicular pe planul dreptelor date și intersectîndu-l după o paralelă egal depărtată de ele. **857.** Planele perpendiculare pe planul dreptelor și trecînd prin bisectoarele unghiului format de cele două drepte. **858.** Fie I, I_1, I_2, I_3 centrele cercului înscris și ale celor exînscrise triunghiului format de cele trei drepte date. Locul este alcătuit din patru drepte ce trec prin I, I_1, I_2, I_3 și sînt perpendiculare pe planul dreptelor date. **859.** Patru puncte rezultate din intersecția planului (P) cu cele patru drepte din problema precedentă. **860.** Trei plane paralele. Două plane paralele și al treilea intersectîndu-le după două drepte paralele. Două plane care se intersectează după o dreaptă (Δ), al treilea

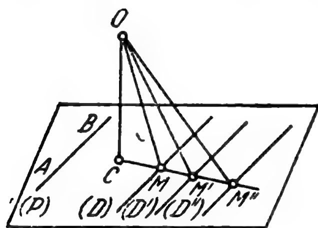


Fig. 288

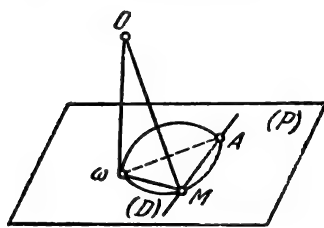


Fig. 289

paralel cu (Δ); atunci cele trei plane formează ceea ce se numește o *suprafață prismatică*. Trei plane care trec printr-o aceeași dreaptă. **861.** Se duce prin (D) și (D') cîte un plan paralel cu (Δ) care se intersectează după dreapta căutată. **862.** În planul determinat de P și (Δ) punctele P' descriu o dreaptă $(D) \| (\Delta)$. În planul determinat de Q și (Δ) punctele Q' descriu dreapta (D_1) simetrică cu (Δ) față de Q. Deoarece (D) și (D_1) sînt paralele cu (Δ), rezultă $(D) \| (D_1)$; ele determină un plan (R) paralel cu (Δ). **863.** a) Planele ABC și ABD tăiate de (P) și (R) dau $EF \| AB$ și $HG \| AB$, deci $\overline{EF} \| \overline{HG}$. Planele CAD și CBD tăiate de (R) și (Q) dau asemănător $\overline{FG} \| \overline{EH}$, deci figura $EFGH$ este paralelogram

(fig. 290). Avem $\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} = \frac{d_2}{d_1 + d_2}$ și $\frac{\overline{FG}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} = \frac{d_1}{d_1+d_2}$. Paralelogramul devine dreptunghi dacă $\overline{EF} \perp \overline{FG}$, adică $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ și devine romb dacă $\overline{EF} = \overline{FG}$ sau $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{d_1}{d_2}$. Ca să devină pătrat, trebuie să îndeplinească și condiția de dreptunghi și cea de romb. b) Paralelogramul se mișcă în planul (R) rămînînd egal cu el însuși.

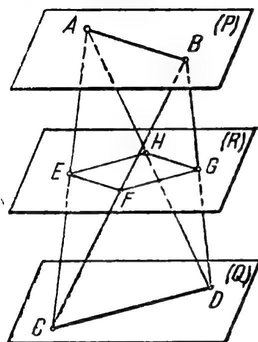


Fig. 290

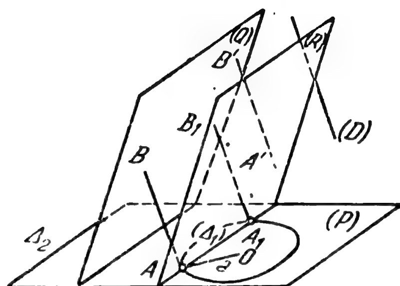


Fig. 291

864. Cînd B se mișcă în planul (Q) locul lui A este alcătuit din două plane (R_1), (R_2) paralele cu (Q), care intersectează planul (P) după două drepte (Δ_1), (Δ_2) (fig. 291). Acestea intersectează cercul cu centrul O și raza a, construit în planul (P) în punctele A, A_1, A_2, A_3. Paralelele prin aceste puncte la (D) dau soluțiile AB, A_1B_1 etc. (în figură două soluții). Dacă (Δ_1), (Δ_2) nu intersectează cercul, nu avem nici o soluție. Putem avea patru soluții, trei, două, una sau nici una. **865.** Orice plan care trece prin (Δ) intersectează planul (P) după o dreaptă paralelă cu (Δ). Problema revine la construcția, în planul (P), a unui segment $\overline{AB}$, de lungime dată și paralel cu o direcție dată (probl. 366). Două soluții. Dacă $(D) \| (D')$ și lungimea $\overline{AB}$ este mai mică decît distanța dintre ele, problema este imposibilă; dacă AB este mai mare ca această distanță, o infinitate de soluții sau nici una. **866.** Fie $OA \| (D), OA' \| (D'), OB \perp AOA'$. Se duce $(\Delta) \| OB$ și întîlnind pe (D) și (D'). (Δ) este dreapta cerută. *Altă construcție.* Se duce prin (D') un plan $(P') \| (D)$ (fig. 292), se proiectează (D) pe (P') în (D'') care intersectează pe (D') în A'. Se duce $A'A \perp (P')$ care intersectează pe (D) în A. AA' este dreapta cerută. **867.** Notațiile din soluția problemei precedente. Fie M un punct pe (D), M' un punct pe (D') M'' proiecția lui M pe (P'). $\overline{MM''} = \overline{AA'} < \overline{MM'}$. **868.** Demonstra-

ție analogă cu cea de la probl 59. **869.** Fie (P) planul perpendicular pe (D') dus prin (D), intersectînd pe (D') în A. Se duce $Ax \parallel (D)$: Ax va fi conținută în (P). Însă $(P) \perp (D')$, deci $(D') \perp Ax$ și $(D') \perp (D)$. Așadar, trebuie ca (D) și (D') să fie perpendiculare. **870.** Fie M un punct pe (D), A proiecția lui pe (D'). Se va arăta că A este fix, adică este același oricare ar fi M pe (D), observînd că planul determinat de MA și (D) este perpendicular pe (D').

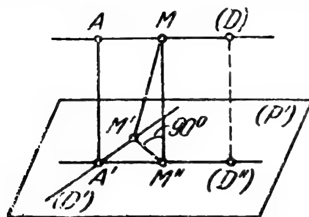


Fig. 292

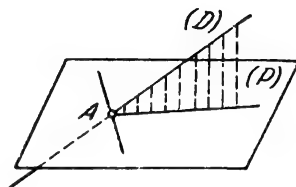


Fig. 293

871. *Prima soluție.* Se va observa că toate perpendicularele ridicate în A pe (D) se găsesc într-un plan $(Q) \perp (D)$ (fig. 293). Planele (P) și (Q) se intersectează după dreapta cerută. *A doua soluție.* Fie M un punct al dreptei (D) și N proiecția lui pe planul (P). Se duce $AB \perp AN$, în planul (P); aceasta este dreapta cerută, căci AB este perpendiculară pe planul AMN, deci pe (D). **872.** Fie $ABCD$ patrulaterul, planul $(P) \parallel AB$ și CD intersectează pe AC în M. pe BD în N. Se duc prin AB și CD plane paralele cu (P) și se aplică teorema relativă la dreptele AC, BD, intersectate de trei plane paralele, deci $\overline{AM} : \overline{MC} = \overline{BN} : \overline{ND}$. *Altfel.* Se mai notează cu K și L intersecțiile dreptelor AD și BC cu planul (P); avem $MK \parallel CD$, $LN \parallel CD$, $ML \parallel AB$, $KN \parallel AB$, deci $\overline{AM} : \overline{MC} = \overline{BL} : \overline{LC} = \overline{BN} : \overline{ND}$. **873.** Printr-un punct M pe (D) se duce $MA \perp (P)$. Planul cerut este determinat de MA și (D). **874.** Un plan paralel și egal depărtat de ele. **875.** Planele bisectoare ale celor patru diedre formate de planele date. **876.** Fie A și B proiecțiile lui M pe fețele diedrului. Planul AMB este perpendicular pe fețe, deci pe muchia diedrului, pe care o intersectează în C. Se va observa că $\sphericalangle ACB$ este unghiul plan, apoi că $MA \perp CA$, $MB \perp CB$, deci $\sphericalangle AMB + \sphericalangle ACB = 180°$, dacă M este situat în interiorul diedrului dat sau în diedrul opus la vîrf; $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ACB$, dacă M este situat în unul din diedrele alăturate. **877.** Se proiectează A, B, C, D în A', B, C', D' pe planul (P). $\overline{AL} : \overline{BL} = \overline{AA'} : \overline{BB'}$ etc. **878.** Două plane perpendiculare pe planul xOy și trecînd prin bisectoarele unghiului xOy. **879.** Dreptele căutate fac unghiuri egale cu $OA \perp (P)$ și $OA' \perp (P')$. Locul se compune din două plane perpendi-

culare pe planul AOA' și trecînd prin bisectoarele unghiului AOA'. Planul AOA' fiind perpendicular pe intersecția planelor (P) și (P'), planele care constituie locul sînt parale cu această dreaptă. **880.** Presupunem problema rezolvată. Triunghiurile dreptunghice MAC, MDB (fig. 294) sînt asemenea, avînd un unghi ascuțit egal, deci $\overline{MA} : \overline{MB} = \overline{AC} : \overline{BD} = m : n$. Deci M se află la intersecția cercului dat, cu cercul lor geometric al punctelor pentru care $\overline{MA} : \overline{MB} = m : n$. Cel mult două soluții (G.M. LIII). **881.** Se duce $AO \perp (P)$ și AM, astfel ca $\sphericalangle OAM = 90° - \alpha$, deci $\sphericalangle OMA = \alpha$ (fig. 295). Toate oblicele care fac unghiul α cu planul (P) sînt egale

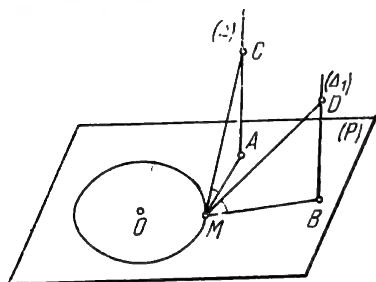


Fig. 294

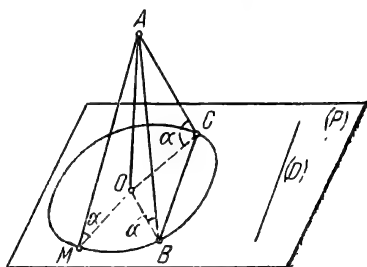


Fig. 295

cu $\overline{AM}$ și au picioarele pe cercul cu centrul O și raza $\overline{OM}$. Deci $\overline{BC} = \overline{AM}$ este cunoscută. Problema se reduce la a înscrie în cercul (O) o coardă de lungime dată, paralelă cu dreapta (D) (probl. 336). Trebuie ca $\overline{BC} < 2\overline{OB}$. În poziția limită cînd $\overline{BC}$ = diametrul cercului, $\alpha = 60°$. Deci ca problema să aibă soluție trebuie ca $\alpha < 60°$. **882.** Fie (P) un plan perpendicular pe intersecțiile planelor date, care le intersectează după un triunghi ABC. Locul cerut se compune din perpendicularele pe planul (P) duse în centrul cercului înscris și în centrele cercurilor exînscrise. **883.** Se va arăta că cele trei plane bisectoare ale diedrelor interioare se intersectează după o dreaptă care este o parte a locului; apoi că planele bisectoare a două diedre exterioare și planul bisector al diedrului al treilea trec iarăși printr-o dreaptă a locului. Locul se compune din patru drepte. **884.** Se duce un plan perpendicular pe cele trei drepte, care le intersectează în A, B, C. Perpendiculara pe planul ABC, în centrul cercului circumscris triunghiului ABC, este locul cerut. **885.** Locul se compune din patru drepte, intersecții ale planelor duse prin bisectoarele fiecărei fețe a triedrului și perpendiculare pe acele fețe. **886.** Fie S vîrful triedrului dat și A, B, C trei puncte pe cele trei muchii, S', A', B', C' simetricele lor în raport cu O. $\overline{SA} = \overline{S'A'}$, $\overline{SB} = \overline{S'B'}$, $\overline{SC} = \overline{S'C'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{CA} = \overline{C'A'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Așadar

elementele sînt egale. Să presupunem un observator I cu capul în S şi cu picioarele în planul ABC şi observatorul simetric I' cu capul în S' şi cu picioarele pe $A'B'C'$. Dacă pentru I un punct care descrie conturul ABC de la A la B, apoi la C merge de la stînga spre dreapta, de exemplu, punctul simetric care descrie conturul $A'B'C'$ va merge, pentru I', de la dreapta spre stînga. **887.** Aceeaşi cale ca în problema precedentă. Triedrele se pot suprapune. **888.** $A'B'C'$ este intersecţia planelor (P) şi (Q). **889.** Fie ABC, $A_1B_1C_1$ două triunghiuri într-un plan; AA_1, BB_1, CC_1 se întîlnesc în O'. Se uneşte un punct ω din spaţiu cu A_1, B_1, C_1 şi O'. Fie O un punct arbitrar pe $\omega O'$. OA intersectează pe ωA_1 în a, OB intersectează pe ωB_1 în b, OC intersectează pe ωC_1 în c. Dreptele BC, B_1C_1, bc se întîlnesc în punctul de intersecţie A' al planelor OBC, ωB_1C_1 şi ABC, căci sînt dreptele de intersecţie ale acestor plane, două cîte două. În acelaşi mod obţinem B' şi C'; însă din problema precedentă A', B', C' sînt coliniare. **890.** Fie S vîrful, SA, SB, SC muchiile triedrului. Planele duse prin SB şi SC perpendicular pe ASC, ASB se intersectează după dreapta SI. Să ducem un plan perpendicular pe SI, care intersectează muchiile triedrului în A, B, C şi pe SI în I. $SBI \perp ABC$ şi $SBI \perp ASC$, deci $SBI \perp AC$ şi $BI \perp AC$; de asemenea $CI \perp AB$, prin urmare, $AI \perp BC$ şi $SAI \perp BSC$. **891.** Fie S vîrful, SA, SB, SC muchiile triedrului. Fie $SA' \perp SA$ şi situată în planul CSB. Ca să obţinem dreapta SA' se proiectează SA în SA'' pe CSB şi se duce în acest plan $SA' \perp SA''$ (probl. 871), deci $SA' \perp ASA''$ şi $SA' \perp SI$ din problema precedentă. Celelalte două drepte analoge cu SA' sînt şi ele perpendiculare pe SI. **892.** Fie $OABC$ triedrul în care $AOC \perp AOB$, $BOC \perp AOB$. Rezultă $OC \perp AOB$, deci $OC \perp OA$; $OC \perp OB$. Reciproca se demonstrează uşor. $\sphericalangle AOB$ este unghiul plan al diedrului cu muchia OC. **893.** Laturile opuse AB, CD se intersectează în E, AD şi BC în F. Planul cerut trebuie să fie paralel cu planul OEF. **894.** Va trebui ca $\sphericalangle EOF = 90°$, deci O trebuie luat pe sfera descrisă pe $\overline{EF}$ ca diametru. **895.** AC şi BD intersectează pe EF în G şi H. O trebuie luat pe sfera descrisă pe $\overline{GH}$ ca diametru. **896.** O trebuie luat pe cercul de intersecţie al sferelor descrise pe $\overline{EF}$ şi $\overline{GH}$ ca diametre. **897.** Dreptele AM, BM, CM intersectează laturile opuse respectiv în D, E, F (fig. 296). Din asemănarea triunghiurilor ADO, BEO, CFO cu MDP, MEQ, MFR, rezultă $\overline{MP} : \overline{OA} = \overline{MD} : \overline{AD}$, $\overline{MQ} : \overline{OB} = \overline{ME} : \overline{BE}$, $\overline{MR} : \overline{OC} = \overline{MF} : \overline{CF}$. Adunînd şi ţinînd seama că $\frac{\overline{MD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{ME}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{MF}}{\overline{CF}} = 1$ (probl. 764), obţinem $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} +$

$+ z/c = 1$ (R.M.F. 1952). **898.** a) Patrulaterele $ABED$, $ACFD$ sînt inscriptibile (fig. 297). Scriind puterea punctului O față de cele două cercuri, avem $\overline{OD} \cdot \overline{OA} = \overline{OE} \cdot \overline{OB} = \overline{OF} \cdot \overline{OC}$, din care se deduce că $BCFE$ este inscriptibil. b) Din asemănarea perechilor de triunghiuri ODE, OAB și ODF, OAC rezultă $\overline{OB} = \overline{OC}$, dacă $\overline{DE} = \overline{DF}$. Pentru ca $\overline{DE} = \overline{EF}$, calculăm $\overline{DE} = \overline{AB} \cdot \overline{OD} : \overline{OB}$; $\overline{EF} = \overline{BC} \cdot \overline{OF} : \overline{OB}$; egalăm și scriem sub formă de proporție, inlocuind

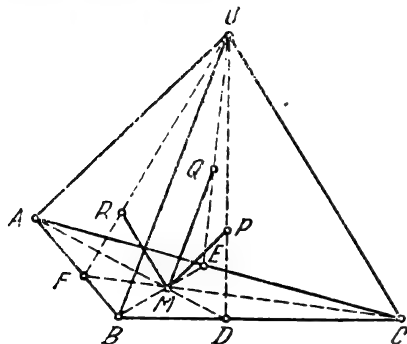


Fig. 296

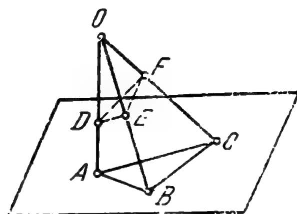


Fig. 297

$\overline{OD} : \overline{OF} = \overline{OB} : \overline{OA}$ (Olimp. matematică 1954, R.M.F.). **899.** Fie O vîrful triedrului, M mijlocul lui $\overline{BC}$ (fig. 298). Se va observa

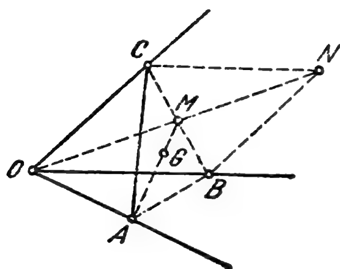


Fig. 298

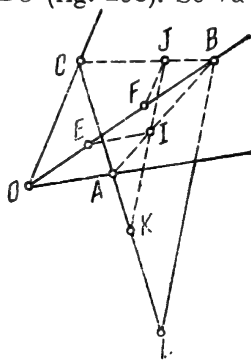


Fig. 299

că M poate fi ales oriunde vrem pe fața BOC, căci nu avem decît să luăm simetricul N al lui O în raport cu M și să ducem prin N două paralele la OB și OC, care întîlnesc aceste drepte în B și C. M va fi mijlocul lui $\overline{BC}$. Pe de altă parte, $\overline{AG} = 2\overline{AM} : 3$, locul lui G este deci un plan paralel cu fața BOC și trecînd printr-un punct μ

pe OA, așa ca $\overline{A\mu} = 2\overline{AO} : 3$. **900.** M este fix, A se mișcă pe muchia OA, $\overline{MG} = \frac{1}{3}\overline{MA}$. Locul este o dreaptă paralelă cu OA, trecînd printr-un punct α pe $\overline{MO}$, așa ca $\overline{M\alpha} = \overline{MO}/3$. **901.** Se duce $OA' \perp BC$, $OB' \perp CA$, $OC' \perp AB$, A' fiind pe BC etc. În virtutea teoremei celor trei perpendiculare AA', BB', CC' sînt înălțimile triunghiului ABC. Planele OAA', OBB', OCC' sînt perpendiculare pe ABC, deci $OH \perp ABC$. **902.** Se duce $OY' \perp BC$; avem $\overline{AO'}^2 = \overline{A'A} \cdot \overline{A'H}$, de unde $\frac{1}{4}\overline{BC}^2 \cdot \overline{OA'}^2 = \left(\frac{1}{2}\overline{A'A} \cdot \overline{BC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overline{A'H} \cdot \overline{BC}\right)$ sau (aria $\Delta OBC)^2 =$ (aria ΔABC) · (aria ΔBHC), deci (aria$\Delta OBC)^2 +$ (aria $\Delta OCA)^2 +$ (aria $\Delta OAB)^2 =$ (aria ΔABC) · [(ariaΔBHC) + (aria ΔCHA) + (aria ΔAHB)] = (aria $\Delta ABC)^2$. **903.** Dreapta IJ intersectează pe AC în K (fig. 299). Ducem $BL \parallel IJ$, L pe AC. Avem $\overline{KI} : \overline{LB} = \overline{AI} : \overline{AB}$; $\overline{KJ} : \overline{LB} = \overline{CJ} : \overline{CB}$, de unde $\overline{KI} : \overline{KJ} = (\overline{AI} \cdot \overline{CB}) : (\overline{AB} \cdot \overline{CJ})$. Ducem $IE \parallel OA$ și $JF \parallel OC$, E și F pe OB. Înlocuind în egalitatea de mai sus segmentele proporționale, obținem $\overline{KI} : \overline{KJ} = \overline{OE} : \overline{OF} =$ const, deci K este fix (G.M.F. 1952). **904.** Fie AA', BB' două poziții determinate ale dreptei MM'. Se duce Ab, Am egale și paralele respective cu BB' și MM'. Se va observa că AA', Ab, Am de o parte, (Δ'), $B'b$, $M'm$ de alta, sînt situate în cîte un plan, deci A', b și m sînt coliniare. Cînd $\overline{MM'}$ variază, m se mișcă pe $A'b$; $\overline{MM'}$ va fi minim cînd m este piciorul perpendicularei din A pe $A'b$. În cazul particular cînd $\overline{AA'} = \overline{BB'}$, atunci M și M' pentru minim sînt mijloacele segmentelor $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$. **905.** Fie a, b proiecțiile punctelor A, B pe plan. Se observă că $\overline{aX} : \overline{bX} = \overline{Aa} : \overline{Bb} =$ const, X este situat la intersecția cercului descris pe $\overline{MM'}$ ca diametru, cu (Δ), M și M' fiind punctele ce împart pe $\overline{ab}$ în raportul $\overline{Aa} : \overline{Bb}$ (G.M.IX). **906.** Din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $AD \perp (\Delta)$ și $CB \perp (\Delta')$. Centrul sferei circumscrise tetraedrului $ABCD$ este la mijlocul lui $\overline{CD}$. Pentru că $\overline{CD}$ este constant, rezultă că $\overline{AO}$ este constant și deci locul lui O este intersecția sferei de centru A și rază $\overline{AO}$ cu planul perpendicularelor pe $\overline{AB}$, prin mijlocul său. Locul celuilalt punct este tot un cerc (G.M.X.). **907.** Fie L, M, N, P punctele unde planele OCD, ODA, OAB, OBC întîlnesc respectiv laturile AB, BC, CD, DA. Dreapta AO întîlnește planul BCD în punctul α, dreapta CO întîlnește planul ABD în γ, $C\alpha$ intersectează pe BD în punctul Q. A, γ și Q sînt coliniare, ca situate pe intersecția planelor ABD și OAC. Dreapta $D\gamma$ intersectează pe AB în punctul L, dreapta $B\gamma$ intersectează pe AD în P,

$B\alpha$ intersectează pe CD în N, iar $D\alpha$ intersectează pe BC în M. Dreptele AQ, BP, DL concurente în triunghiul ABD și dreptele BN, CQ, DM, concurente în triunghiul BCD, dau (probl. 758) $\overline{LA} \cdot \overline{PD} \cdot \overline{QB} = -\overline{LB} \cdot \overline{PA} \cdot \overline{QD}$ și $\overline{NC} \cdot \overline{MB} \cdot \overline{QD} = -\overline{ND} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{QB}$. Înmulțind aceste egalități, membru cu membru, obținem $\overline{LA} \cdot \overline{MB} \cdot \overline{NC} \cdot \overline{PD} = \overline{LB} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{ND} \cdot \overline{PA}$ și proprietatea rezultă din reciproca problemei 877. **908.** Fie L, M, N, Q punctele de întîlnire ale planului (P) cu laturile AB, BC, CD, DA ale patrulaterului strîmb $ABCD$. Avem (probl. 877) $\overline{AL} \cdot \overline{BM} \cdot \overline{CN} \cdot \overline{DQ} = \overline{BL} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{DN} \cdot \overline{AQ}$. Fie O punctul comun planelor LCD, MDA, NAB. Planul dus prin O și dreapta BC intersectează latura DA în punctul Q' și după problema precedentă $\overline{AL} \cdot \overline{BM} \cdot \overline{CN} \cdot \overline{DQ'} = \overline{BL} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{DN} \cdot \overline{AQ'}$. Se deduce că Q' coincide cu Q și deci planul QBC trece prin O. **909.** Fie I punctul comun diagonalelor AC, BD. Relația lui Stewart aplicată punctelor coliniare A, I, C, apoi B, I, D cu punctul O exterior dă $\overline{OA}^2 \cdot \overline{IC} - \overline{OI}^2 \cdot \overline{AC} + \overline{OC}^2 \cdot \overline{AI} = \overline{IC} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AI}$ și $\overline{OB}^2 \cdot \overline{ID} - \overline{OI}^2 \cdot \overline{BD} + \overline{OD}^2 \cdot \overline{BI} = \overline{ID} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BI}$. Eliminînd pe $\overline{OI}^2$, obținem $\overline{OA}^2 \cdot \overline{IC} \cdot \overline{BD} + \overline{OC}^2 \cdot \overline{AI} \cdot \overline{BD} - \overline{OB}^2 \cdot \overline{ID} \cdot \overline{AC} - \overline{OD}^2 \cdot \overline{BI} \cdot \overline{AC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}\ (\overline{AI} \cdot \overline{IC} - \overline{BI} \cdot \overline{ID}) = 0$, patrulaterul fiind inscriptibil. Se va arăta că $\overline{BD} \cdot \overline{IC}$, $\overline{BD} \cdot \overline{AI}$, $\overline{AC} \cdot \overline{IB}$, $\overline{AC} \cdot \overline{ID}$ sînt proporționale cu ariile din enunț. **910.** Dreapta (Δ) este perpendiculară pe planul (P') și îl intersectează într-un punct M_1. Dreptele A_1M_1, B_1M_1, C_1M_1 sînt respectiv perpendiculare pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Fie N_1 cel de-al doilea centru de ortologie al triunghiurilor $A_1B_1C_1$, $A'B'C'$, iar A_2, B_2, C_2, N_2 proiecțiile punctelor A', B', C', N_1 pe planul (P). Triunghiurile ABC, $A_2B_2C_2$ sînt ortologice, cu centrul de ortologie în N_2 (G.M.XXVIII).

XVII. **911.** Fie A, B, C coliniare, a, b, c, proiecțiile pe planul (P). $Aa \| Bb \| Cc$; Aa, Bb, Cc sînt într-un plan (P), iar a, b, c sînt la intersecția lui (P) cu (P'). **912.** $Aa \| Bb \| Cc$. **913.** Planele care proiectează pe A, B, C pe (Δ) sînt paralele. *Altfel.* Fie (P) un plan dus prin (Δ) (fig. 300); se proiectează A, B, C în A', B', C' pe acest plan. În virtutea teoremei celor trei perpendiculare, proiecțiile lui A', B', C' pe (Δ) sînt tocmai a, b, c. Însă $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'} = \overline{ab} : \overline{bc}$. **914.** Fie D, E, F mijloacele laturilor triunghiului ABC (fig. 301). Din problema 912 rezultă că proiecția lui D pe planul (P) este mijlocul D' al lui $B'C'$. Deci medianele lui ABC se proiectează tot ca mediane ale lui $A'B'C'$. **915.** Figura din

spațiu este intersecția planelor care trec prin (D) și (D') și sînt perpendiculare respectiv pe (P) și (Q), deci o dreaptă (fig. 302). Caz de excepție cînd (D) și (D') se întîlnesc pe muchia comună a lui (P) și (Q) și sînt ambele perpendiculare pe această muchie; atunci figura din spațiu poate fi orice figură plană, cuprinsă în planul (D, D'). **916.** Planele Dd, $D'd'$ sînt paralele, deci $(d) \| (d')$. Dacă $(D) \perp (P)$ și $(D') \perp (P)$, atunci proiecțiile sînt două puncte. Dacă planul dreptelor (D) și (D') este perpendicular pe (P), atunci proiecția este o singură dreaptă. **917.** Se va observa că planul care proiectează dreapta CD pe (P) este perpendicular pe (P) și pe (P') (fig. 303). **918.** Printr-un punct A oarecare al spațiului se duc paralele la (D_1) și (D_2) (fig. 304); acestea determină un plan (Q) paralel cu (D_1) și cu (D_2). Planul căutat este planul dus prin (Δ) perpendicular pe (Q). **919.** Se duce prin AB un plan paralel cu CD și prin BC un plan paralel cu AD (fig. 305); aceste două plane se intersectează după o dreaptă BX. Orice plan perpendicular pe BX răspunde problemei, deoarece laturile opuse se proiectează ca laturi paralele. Fie M, N mijloacele laturilor DA, DC și I, J mijloacele diagonalelor DB, AC. Planele MIJ și NIJ sînt paralele cu ABX și CBX, deci $BX \| IJ$; orice plan de proiecție trebuie să fie perpendicular pe IJ. *Altă soluție.* Pentru ca patrulaterul $ABCD$ să se proiecteze ca paralelogram trebuie ca mijloacele M și N ale diagonalelor $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$ să coincidă în proiecție, deci planul de proiecție să fie perpendicular pe MN. **920.** Fie aob proiecția pe (P), $AO \| ao$ (fig. 306). $AO \perp OB$, $AO \perp Oo$, deci $AO \perp BOo$; $ao \perp BOo$, prin urmare, $ao \perp ob$. **921.** Se va presupune că OB nu este paralelă cu ob și va trebui să se arate că $OA \perp oa$. Se va presupune contrariul și fie $OA' \| Oa$. Deoarece $oa \perp ob$, $oa \perp Oo$, rezultă $oa \perp Oob$, $OA' \perp Oob$; $OA' \perp OB$. Însă $OB \perp OA$, $OB \perp OA'$, deci $OB \perp Ooa$, de unde $OB \| ob$, ceea ce este contrar ipotezei. OA' și OA se confundă. **922.** OA și OB întîlnesc planul în A' și B'. Se duce prin O planul perpendicular pe OB', care intersectează pe (P) după dreapta $A'x$. Fie C' proiecția lui B' pe $A'x$. Punctul o, proiecția lui O, se găsește pe $B'C'$. Să presupunem că OB se confundă cu OB' și nu cu prelungirea lui $B'O$. Dacă OA este tocmai OA', atunci $\sphericalangle aob = \sphericalangle A'oB > \sphericalangle A'C'B'$, deci $\sphericalangle aob > 90°$. Dacă OA este prelungirea lui $A'O$, atunci $\sphericalangle aob < 90°$. Situațiile se pot rezuma astfel: se duce prin O un plan (P') paralel cu (P); dacă laturile OA, OB sînt de aceeași parte a planului (P'), unghiul drept se proiectează ca unghi obtuz, dacă OA, OB sînt de o parte și de alta a lui (P), unghiul drept se proiectează ca unghi ascuțit. **923.** O dreaptă: intersecția planelor perpendiculare pe (D_1) și (D_2) respectiv în O_1 și O_2. Această dreaptă este perpendiculară și pe (D_1) și pe (D_2), deci paralelă cu perpendiculara lor comună. **924.** Deoarece $\sphericalangle ABD = 90°$ și $\sphericalangle ACD = 90°$, punc-

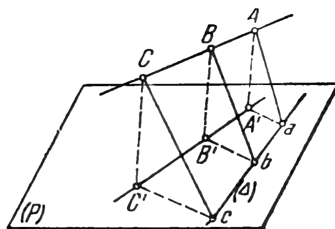


Fig. 300

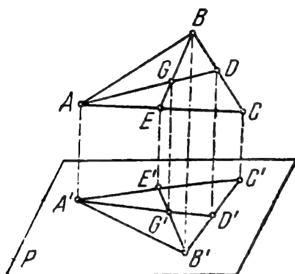


Fig. 301

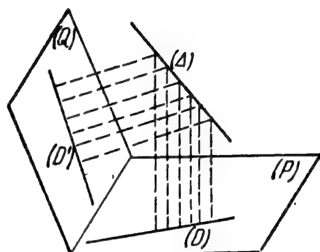


Fig. 302

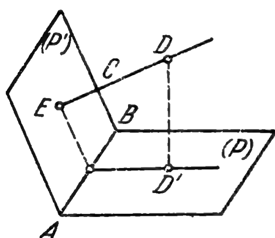


Fig. 303

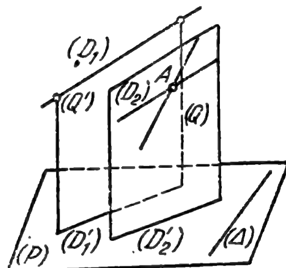


Fig. 304

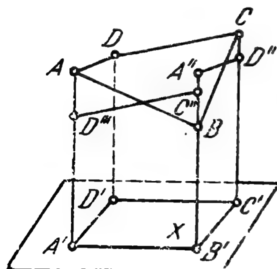


Fig. 305

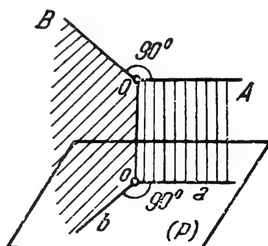


Fig. 306

tele B, C se găsesc pe sfera cu diametrul $\overline{AD}$ (fig. 307); aceasta este intersectată de planul BCD după un cerc. Dacă E este piciorul înălțimii din A, atunci $\sphericalangle AED=90°$, deci E se află pe sfera de diametru $\overline{AD}$ și în planul BCD, adică pe cercul BCD (Olimpiada matematică 1954. G.M.F. seria B). **925.** Fie D,E,F mijloacele laturilor lui ABC; BB_1, CC_1 înălțimile. Întîi să găsim un plan pe care ABC se proiectează ca triunghi isoscel, $A'B'C'$. Ducem prin AC un plan (P) arbitrar și fie M proiecția lui B pe (P). Orice plan perpendicular pe EM răspunde problemei, căci dacă M' este proiecția lui M pe acel plan, atunci $\overline{B'M'}$ este mediană și înălțime, deci $\overline{B'A'}=\overline{B'C'}$. Trecem la problema din enunț. Trebuie găsit un plan pe care ABC să se proiecteze în $A'B'C'$, isoscel și cu baza $\overline{A'C'}$ și cu baza $\overline{A'B'}$, deci echilateral. Fie N proiecția lui C pe un plan (Q) ce trece prin AB. Ar trebui găsit un plan (R) perpendicular deodată și pe EM și pe FN, deci trebuie ca $EM||FN$. Cînd (P) se rotește în jurul lui AC, locul lui M este cercul cu diametrul $\overline{BB_1}$ perpendicular pe AC, iar EM este o generatoare a conului (E) cu baza acest cerc și vîrful E. Analog găsim conul (F) cu vîrful în F și cu baza cercul cu diametrul $\overline{CC_1}$ perpendicular pe AB. Căutăm generatoarele paralele în cele două conuri. Pentru aceasta dăm lui (F) o translație pînă cînd F vine în E. Generatoarele comune celor două conuri cu vîrful E dau direcția EM căutată. Conurile (E) și (F), intersectate cu un plan ce trece prin BC și este perpendicular pe ABC, dau ca secțiuni elipse cu axa mare $\overline{BC}$. Prin translația lui (F) una din elipse vine cu vîrful în D, deci are cu elipsa lui (E) două puncte comune. Se găsesc deci două direcții $EM||FN$ simetrice față de planul ABC.

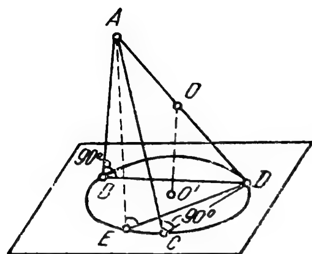


Fig. 307

XVIII. **926.** Fie $ABCD$, $A'B'C'D'$ cele două paralelograme de bază. Avem diagonalele $\overline{AC'}$, $\overline{BD'}$, $\overline{CA'}$, $\overline{DB'}$. Să luăm diagonalele AC' și BD' care sînt diagonalele paralelogramului $ABC'D'$; BD' trece prin mijlocul O al lui $\overline{AC'}$. Celelalte diagonale trec și ele prin mijlocul lui $\overline{AC'}$. Punctul O care este mijlocul diagonalelor este centrul paralelipipedului. **927.** Fie M și M' extremitățile segmentului, A un vîrf al feței pe care se găsește M, A' vîrful diagonal opus lui A în paralelipiped. Triunghiurile OMA

și $OM'A'$ sînt egale. **928.** Paralelogramul care are două diagonale oarecare ale paralelipipedului ca diagonale este un dreptunghi. **929.** Considerînd paralelograme care conțin cîte două diagonale, se va deduce că orice muchie a paralelipipedului este perpendiculară pe două fețe opuse. **930.** Fie $ABCD$, $A'B'C'D'$ cele două

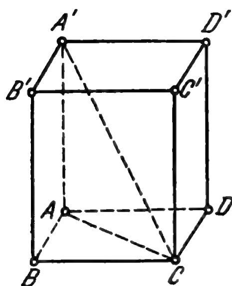


Fig. 308

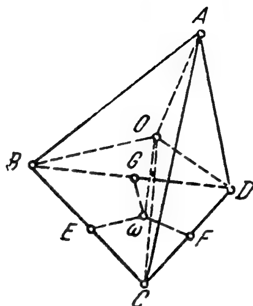


Fig. 309

dreptunghiuri de bază, CA' o diagonală (fig. 308). $\overline{CA'}^2=\overline{AA'}^2+\overline{AC}^2=\overline{AA'}^2+\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AA'}^2+\overline{AB}^2+\overline{AD}^2$. **931.** Într-adevăr, există un punct egal depărtat de cele patru vîrfuri ale tetraedrului (probl. 849) (fig. 309). **932.** Aceste perpendiculare sînt intersecții ale planelor din problema precedentă. **933.** Se va observa că două oarecare din aceste drepte sînt diagonalele unui paralelogram (probl. 868), deci una trece prin mijlocul celeilalte. **934.** Fie M mijlocul muchiei $\overline{CD}$. I și J punctele comune medianelor fețelor BCD și ACD (fig. 310). Medianele AI și BJ ale tetraedrului se întîlnesc în G. Avem $\overline{IG}:\overline{GA}=\overline{JG}:\overline{GB}=\overline{IJ}:\overline{AB}=\overline{MI}:\overline{MB}=\overline{MJ}:\overline{MA}=1:3$. Așadar două mediane oarecare ale tetraedrului se întîlnesc și deoarece nu se poate să fie toate în același plan, ele au un punct comun G, care împarte fiecare mediană în raportul 1:3. **935.** Dreapta $\overline{MG}$ trece prin mijlocul M' al muchiei AB (probl. 475). **936.** Fie AB o muchie a bazei, M punctul luat pe bază, A' punctul unde perpendiculara în M pe bază intersectează fața laterală care trece prin AB, A_1 proiecția lui M pe AB. Punem $\overline{MA'}=a$, $\overline{MA_1}=\alpha$. Facem aceeași

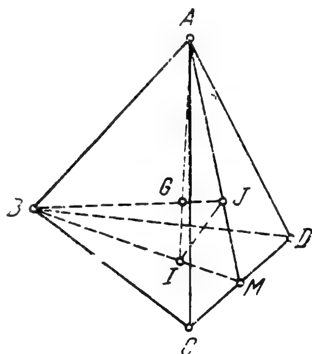


Fig. 310

operație cu toate muchiile bazei și însemnăm cu b și β, c și γ,... cantități analoge cu a și α. Triunghiurile analoge cu $MA'A_1$ sînt asemenea, deci $a:\alpha = b:\beta = c:\gamma = ... = (a+b+c+...):(\alpha+\beta+\gamma+...)$. Dacă se ia un alt punct M' pe bază și se însemnă cu a' și α', b' și β', c' și γ',... cantitățile corespunzătoare, avem $a:\alpha = a':\alpha'$, etc., $(a+b+c+...):(\alpha+\beta+\gamma+...) = (a'+b'+c'+...):(\alpha'+\beta'+\gamma'+...)$, însă $\alpha+\beta+\gamma+...=\alpha'+\beta'+\gamma+...$ (probl. 753), prin urmare, $a+b+c+... = a'+b'+c'+...$ **937.** Se vor lua cele trei plane bisectoare relative la muchiile care formează o față a tetraedrului; aceste plane se întîlnesc într-un punct I egal depărtat de toate fețele tetraedrului, deci I se va găsi și pe celelalte plane bisectoare. **938.** Prin fiecare muchie a tetraedrului se duce cîte un plan paralel cu muchia opusă. Se formează astfel un paralelipiped în care muchiile tetraedrului sînt diagonalele fețelor paralelipipedului. Se va observa că numai fețele care au muchiile AD și BC ca diagonale sînt paralelograme, celelalte sînt dreptunghiuri. Se vede imediat cum se poate deduce din orice paralelipiped drept un tetraedru cu două perechi de muchii opuse, egale. **939.** Paralelipipedul din soluția precedentă este dreptunghic (fig. 311). **940.** Se obține dintr-un paralelipiped în care două fețe opuse sînt romburi. **941.** Un paralelipiped care are două perechi de fețe opuse compuse din romburi are și a treia pereche compusă din romburi. Problema propusă rezultă din această observare și din problema precedentă. *Soluție directă.* Fie $AB \perp CD$, $BC \perp AD$. Se duce $AE \perp CD$, $AF \perp BC$ (fig. 312). Rezultă $CD \perp$ planul ABE,

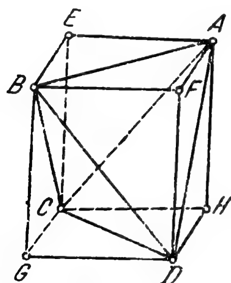


Fig. 311

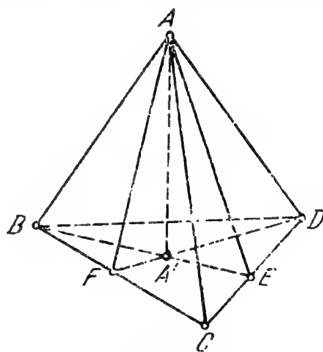


Fig. 312

$BC \perp$ planul ADF, deci dacă $AA' = (ABE, ADF)$, atunci $AA' \perp$ plan BCD și $AA' \perp BD$. Dar $CA' \perp BD$, deci $BD \perp$ plan ACA' și $BD \perp AC$. **942.** Se va observa că prin AB, AC, AD se pot duce plane perpendiculare pe CD, BD, BC (probl. 869), (fig. 312). Aceste plane se intersectează după o dreaptă AA' (probl. 890),

perpendiculară pe planul BCD. Se va observa că A' este punctul de întîlnire al înălțimilor triunghiului BCD. Planul dus prin AB perpendicular pe CD intersectează pe CD în E. AE este o înălțime a triunghiului ACD, BE o înălțime a triunghiului BCD. Fie B' punctul de întîlnire a înălțimilor triunghiului ACD. $BB' \perp ACD$. Dreptele AA' și BB' fiind în ABE se întîlnesc. Două înălțimi oarecare ale tetraedrului ortogonal se întîlnesc și, deoarece nu pot fi conținute toate în același plan, trec toate prin același punct. **943.** Fie H punctul comun perpendicularelor. Planul $A'HB'$ este perpendicular pe CD și îl intersectează în E așa încît $BA'E$, $AB'E$ sînt înălțimi ale fețelor BCD, ACD. Rezultă că $ABE \perp CD$, deci $AB \perp CD$. Aşadar, H există în cazul tetraedrului ortogonal. **944.** Se va observa că, în paralelipipedul construit, ducînd prin fiecare muchie un plan paralel cu muchia opusă, aceste două muchii opuse sînt diagonalele a două romburi egale, deci suma pătratelor lor este egală cu de patru ori pătratul laturii rombului. Se va observa că laturile tuturor romburilor care constituie fețele paralelipipedului sînt egale. **945.** Se duc $ABE \perp CD$, $CDF \perp AB$, cu punctele E și F pe CD și AB. Dreapta EF este perpendiculara comună lui AB şi CD. Însă AA', BB' sînt în ABE, CC' și DD' în CDF și deoarece înălțimile se întîlnesc, punctul lor comun trebuie să fie pe intersecția EF a planelor ABE și CDF. **946.** Se duce $ABE \perp CD$, $CDF \perp AB$. Măsura diedrului $AB = \sphericalangle CDF$, măsura diedrului $CD = \sphericalangle AEB$. Unghiurile muchiei AB cu ACD și BCD sînt $\sphericalangle BAE$ și $\sphericalangle ABE$. Unghiurile muchiei CD cu ABC și ABD sînt $\sphericalangle DCF$ și $\sphericalangle CDF$. Deci pentru AB și CD avem patru unghiuri drepte. **947.** Se duce $AA' \perp BD$, $CC' \perp BD$. Fie M mijlocul lui $\overline{AC}$, M' al lui $\overline{A'C'}$. Se va observa că $\overline{AA'} = \overline{CC'}$, deci $\overline{M'A} = \overline{M'C}$ și de aici $MM' \perp AC$. Deoarece A', C' sînt proiecțiile lui A și C, M' va fi proiecția lui M, deci $MM' \perp BD$. Așadar MM' este perpendiculara comună muchiilor AC și BD. Din cauza simetriei și deoarece perpendiculara comună a două drepte este unică, M' este mijlocul lui $\overline{BD}$, deci $\overline{AB} = \overline{CD}$. **948.** I fiind punctul comun diagonalelor, se aplică relația lui Stewart (probl. 566) triunghiurilor OAC, OBD; $\overline{OI}^2 \cdot \overline{AC} = \overline{OA}^2 \cdot \overline{IC} + \overline{OC}^2 \cdot \overline{IA} - \overline{IA} \cdot \overline{IC} \cdot \overline{AC}$; $\overline{OI}^2 \cdot \overline{BD} = \overline{OB}^2 \cdot \overline{ID} + \overline{OD}^2 \cdot \overline{IB} - \overline{IB} \cdot \overline{ID} \cdot \overline{BD}$. De aici $\overline{OA}^2 \cdot \overline{IC} \cdot \overline{BD} + \overline{OC}^2 \cdot \overline{IA} \cdot \overline{BD} = \overline{OB}^2 \cdot \overline{ID} \cdot \overline{AC} + \overline{OD}^2 \cdot \overline{IB} \cdot \overline{AC}$. Se va observa că aria ΔBCD : aria $\Delta ABD = \overline{IC} : \overline{IA} = \overline{BC} \cdot \overline{CD} : \overline{AB} \cdot \overline{AD}$; aria ΔABC : aria $\Delta ACD = \overline{IB} : \overline{ID} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} : \overline{AD} \cdot \overline{DC}$, deci $\overline{IC} : \overline{BC} \cdot \overline{CD} = \overline{IA} : \overline{AB} \cdot \overline{AD} = \sqrt{\overline{IC} \cdot \overline{IA}} : \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DA}} = \sqrt{\overline{IB} \cdot \overline{ID}} : \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DA}} =$

$=\overline{ID} : \overline{AD} \cdot \overline{CD} = \overline{IB} : \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ (v. și probl. 903). **949.** Se va presupune că O vine în unul din vîrfurile patrulaterului și se va simplifica. **950.** Se va presupune că O se găsește pe perpendiculara ridicată în ω, centrul cercului $ABCD$, pe planul acestui cerc. Se va deduce $\overline{AC} : \overline{BD} = (\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{CB} \cdot \overline{CD}) : (\overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{DA} \cdot \overline{DC})$. Aceasta se numește a doua teoremă a lui Ptolomeu. **951.** Fie O centrul cercului circumscris, G' punctul de întîlnire a medianelor triunghiului BCD. Fie A_1 proiecția lui A pe BCD, M' mijlocul lui $\overline{A'A_1}$ și G_1 un punct pe $G'A_1$, așa ca $\overline{G'G_1} = \overline{G_1A_1}/3$. Se va observa că O', G_1 și M' sînt coliniare și că G_1 este mijlocul lui $\overline{O'M'}$. Perpendicularele ridicate pe fețele tetraedrului în punctele analoge cu O' se întîlnesc într-un punct O (probl. 932), cele ridicate în punctele analoge cu G_1 se întîlnesc în punctul G comun medianelor tetraedrului. Punctul M' și cele analoge sînt proiecțiile simetricului M al lui O în raport cu G pe fețele tetraedrului. Prin M trec cele patru plane din enunț. **952.** P_1 întîlnește prelungirile muchiilor $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$, în A_1', B_1', C_1', așa că $\overline{OA_1'} = \overline{OA}/2$; $\overline{OB_1'} = \overline{OB}/2$; $\overline{OC_1'} = \overline{OC}/2$. **953.** $A'\alpha$, $B'\beta$ se intersectează în M; $\overline{MA'} : \overline{M\alpha} = \overline{A'B'} : \alpha\sigma$, însă $\overline{A'B'} : \alpha\beta = \overline{A'C'} : \alpha\gamma$, deci $\overline{MA'} : \overline{M\alpha} = \overline{A'C'} : \alpha\gamma$. Dreptele $A'\alpha$, $C'\gamma$ se intersectează în M'; $\overline{M'A'} : \overline{M'\alpha} = \overline{A'C'} : \alpha\gamma = \overline{MA} : \overline{M\alpha}$, deci M și M' coincid. **954.** Punctul M se găsește în planele $OA\alpha$, $OB\beta$, $OC\gamma$, deci pe dreapta care unește punctul O cu punctul comun medianelor $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$. **955.** Diagonalele AC, BD se intersectează în O. Avem $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OA'} = \overline{OB} = \overline{OD} = \overline{OD'}$. Fie O' proiecția lui O pe fața SBC. Avem $\overline{O'B} = \overline{O'C} = \overline{O'A'} = \overline{O'D'}$. Patrulaterul $BCA'D'$ este deci inscriptibil. **956.** Planul AGD intersectează sfera după un cerc (Γ). Tangenta în G la (Γ) este intersecția planului GBC cu AGD, adică dreapta care unește pe G cu mijlocul M al lui BC și care trece prin mijlocul M' al lui $\overline{AD}$ (probl. 935). Se va duce $DF \parallel M'G$; F fiind pe $\overline{AG}$, se va observa că $\overline{AG} = \overline{GF}$, $\sphericalangle DFA = \sphericalangle M'GA = \sphericalangle DEA$, deci $\overline{AG} \cdot \overline{GF} = \overline{AG}^2 = \overline{DG} \cdot \overline{GE}$. **957.** Fie $SABC$ tetraedrul (fig. 313). Planul bisector al diedrului AB intersectează pe SC în D. Se proiectează S și C în E și F pe planul bisector în H și K pe AB. $\sphericalangle SHE = \sphericalangle CKF$, deci $\overline{SH} : \overline{CK} = \overline{SE} : \overline{CF} = \overline{SD} : \overline{CD}$, căci E, D, F sînt coliniare. Așadar ariaΔSAB : aria$\Delta CAB = \overline{SH} : \overline{CK} = \overline{SD} : \overline{CD}$. **958.** Se rotesc fețele BCA, BDA, CDA în jurul muchiilor BC, BD, CD pînă ce A vine în planul BCD în punctele E, F, G. Se va arăta că B, C, D sînt mijloacele laturilor triunghiului EFG. **959.** Punctele E, F, G, H

vor trebui să fie mai întîi într-un plan paralel cu AB și CD, altfel EF și GH s-ar intersecta pe AB, EG și FH pe CD. Deci $EF \| GH \| AB$; $EG \| FH \| CD$, de unde $\overline{AE}=\overline{EG}=\overline{AG}$, $\overline{EF}=\overline{ED}=\overline{FD}$, căci $\sphericalangle DAC=\sphericalangle ADB=60°$. Însă $\overline{EG}=\overline{EF}$, deci E, F, G, H trebuie să se găsească la mijloacele muchiilor respective.

960. $MNPQ$ și $SABC$ au același punct de întîlnire a medianelor. Se observă că aria ΔABC : aria ΔNPQ = aria ΔSBC : aria ΔMPQ = Δaria SCA:ariaΔMNQ=ariaΔSAB: :aria $\Delta MNP=9:1$, apoi de aici că $\overline{MS_1}\cdot\overline{MM_1}=\overline{NA_1}\cdot\overline{NN_1}=\overline{PB_1}\cdot\overline{PP_1}=\overline{QC_1}\cdot\overline{QQ_1}$; $\overline{MM_1}$, $\overline{NN_1}$, $\overline{PP_1}$ și $\overline{QQ_1}$ fiind înălțimile tetraedrului $MNPQ$. Se proiectează $S_1A_1B_1$ pe MNP, se arată că triunghiul Sab obținut are același punct de întîlnire a medianelor ca MNP (G.M. III și IV).

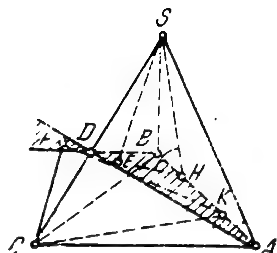


Fig. 313

961. Fie $A_1A_2A_3A_4$ tetraedrul, G_1 punctul de întîlnire a medianelor feței $A_2A_3A_4$, M mijlocul muchiei $\overline{A_3A_4}$. Vom pune $\overline{A_iA_k^2}=d_{ik}$, vom aplica relația lui Stewart triunghiului A_1A_2M și se va deduce A_1G_1 cu ajutorul lui d_{12}, A_1M și A_2M. Înlocuind medianele A_1M și A_2M cu valorile din $A_1A_3A_4$ și $A_2A_3A_4$, se deduce teorema (G.M.I.). **962.** Rezultă din problema precedentă. **963.** Fie M mijlocul lui $\overline{A_3A_4}$, M' al lui A_1A_2. Dreapta $M'M$ este o mediană a triunghiului A_1MA_2. **964.** Rezultă din problema precedentă. **965.** Se construiește un triunghi echilateral avînd ca înălțime diagonala cubului. Jumătatea laturii acestui triunghi este latura cubului. **966.** Fie (P) și (P') cele două fețe și XY intersecția lor. Prin punctul A de pe XY se duce AB în planul (P) și apoi planul $(Q)\perp AB$. Intersecția planelor (P), (Q) cu AB formează un unghi drept (G.M. XIV). **967.** Se observă că planele bisectoare ale diedrelor SA, SB, SC trec prin mijloacele muchiilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ (probl. 366) și se intersectează după o dreaptă ce trece prin G, punctul de întîlnire a medianelor triunghiului ABC. Planele tangente la o sferă oarecare de centru G, duse prin BC, CA, AB, se intersectează în S. Problema este nedeterminată (G.M. VII).

XIX. **968.** $a:\alpha=b:\beta=c:\gamma=\sqrt[3]{V}:\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$. **969.** Se va observa că $d^2=a^2+b^2+c^2$ (probl. 930) $S=s^2-d^2$. **970.** $abc:6$. **971.** $3a^2b\sqrt{3}:2$. **972.** $V=a^2b\sqrt{3}:2$, $s=3a\sqrt{3a^2+4b^2}:2$, $S=3a(\sqrt{3a^2+4b^2}+a\sqrt{3}):2$. **973.** $V=3a^2:2$, $S=3a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{5}):2$. **974.** $a^3\sqrt{2}:12$. **975.** Aria triunghiului ABC este independentă de poziția lui C

pe $y'y$ şi de a segmentului $\overline{AB}$ pe $x'x$. Distanţa lui D la planul dreptelor $x'x$, $y'y$ nu se schimbă cînd D variază pe $z'z$. **976.** Fie I, I' mijloacele laturilor $\overline{CD}$, $\overline{C'D'}$ (fig. 314). Se duce prin II' un plan paralel cu $AA'BB'$ şi se formează un paralelipiped care are acelaşi volum cu prisma dată. **977.** $\sqrt[3]{3V\sqrt{2}}$. **978.** Fie $\overline{CC'}$ înălţimea feţei ABC (fig. 315). În triunghiul dreptunghi OAB avem $\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$ şi $\overline{OC'}\cdot\overline{AB}=ab$, de unde $\overline{OC'}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, iar

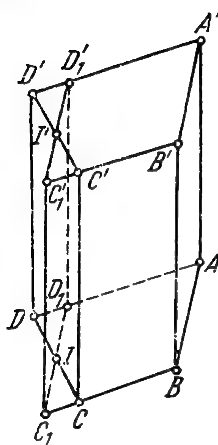


Fig. 314

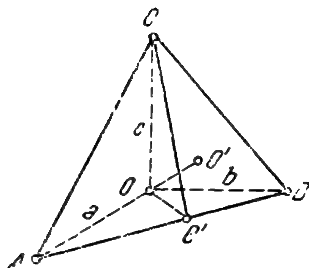


Fig. 315

din triunghiul COC' avem $\overline{CC'}^2=c^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}$. Aria $\triangle ABC=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2}$. Din expresia volumului avem $V=\frac{abc}{6}=$ $=\frac{OO'}{3}\cdot$ aria $\triangle ABC$; $\overline{OO'}=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$. **979.** a) $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=$ $=a\sqrt{3}$, $\overline{CA}=a\sqrt{2}$. Triunghiul ABC este dreptunghic. b) $S=$ $=\frac{a^2}{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$. c) $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **980.** Fie A o latură a bazei B, a latura corespunzătoare a bazei b, S aria căutată. $S:B=(A+a)^2:4A^2$ $S:b=(A+a)^2:(4a^2)$, $\sqrt{S}:(A+a)=\sqrt{B}:(2A)=(\sqrt{B}+\sqrt{b}):[2(A+a)]$, deci $S=(\sqrt{B}+\sqrt{b})^2:4$. **981.** Fie $SA=\alpha$, $SB=\beta$, $SC=\gamma$, $V=\alpha\beta\gamma:6$, însă $\alpha=\sqrt{(b^2+c^2-a^2):2}$, etc. **982.** În tetraedrul $VABC$ ducem înălţimea $\overline{VV'}$ şi $\overline{VA'}$, $\overline{VB'}$, $\overline{VC'}$ înălţimile feţelor laterale (fig. 316). $V'A'$, $V'B'$, $V'C'$ sînt perpendiculare respective pe BC, CA, AB. Planele $VV'A'$, $VV'B'$, $VV'C'$ sînt perpendiculare pe planul ABC. Desfăcînd şi rotind feţele laterale, dreapta V_aA' rămîne

perpendiculară pe BC, deci V_a, V', A' sînt aliniate. La fel celelalte şi concură în V'. Analog arătăm că înălţimile unui triunghi sînt concurente, considerînd un tetraedru cu toate feţele egale (*echifacial*), căruia desfăcîndu-i feţele laterale, obţinem triunghiul $V_aV_bV_c$, unde A, B, C sînt mijloacele laturilor. Dreptele $V_aA'V'$, $V_bB'V'$ şi $V_cC'V'$ sînt înălţimile triunghiului $V_aV_bV_c$ şi prelungite sînt şi ale triunghiului ABC. De asemenea din orice triunghi se poate forma un tetraedru cu toate feţele egale cu triunghiul său median (R.M.F. 1951, I). **983.** Fie $A_1A_2A_3A_4$ tetraedrul, O punctul variabil care unit cu vîrfurile tetraedrului dă patru piramide. Fie h_1,h_2,h_3,h_4 înălţimile duse din O respectiv pe feţele $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$; S fiind aria unei feţe şi h înălţmea tetraedrului, avem $Sh=Sh_1+$ $+Sh_2+Sh_3+Sh_4$, deci $h_1+h_2+h_3+h_4=h=$ const. **984.** Se duc perpendicularele $Aa=Bb=Cc=h$ pe planul hexagonului. Se formează o prismă. Volumul căutat V se obţine scăzînd din volumul prismei şase piramide triunghiulare egale. $V=h\cdot$ aria $Aa'Bb'Cc'-$ $-2h$ aria $ABa'=a^2h\sqrt{3}$. **985.** $h^2=\overline{AA}'^2-a^2$, însă $\overline{AA'}=\overline{AB}-a\sqrt{3}$, $h=a\sqrt{2}$, $V=a^3\sqrt{6}$. **986.** AC, BD se intersectează în O; fie I mijlocul lui $\overline{A'C'}\cdot\overline{OI}=(\overline{AA'}+\overline{CC'}):2=2a$, însă $BB'=4a$, deci $B'I$ trece prin D. Planul $A'B'C'$ trece prin D. Volumul $=$ vol. $ABCA'B'C'+$ $+$ vol. $ADCA'C'=2a^3$. **987.** Se va observa că $\sphericalangle DC'A'=\sphericalangle C'A'B'=$ $=90°$. Aria totală $=a^2(1+3\sqrt{2}+4\sqrt{5})$. **988.** Fie $\overline{BC}=a,\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$; aria$=h(a+b+c)$. **989.** Fie h înălţimea piramidei, x distanţa căutată, aria $A'B'C'D'\cdot x=$ aria $ABCD\cdot h:2$, aria $A'B'C'D'$:aria $ABCD=x^2:h^2$, $x=h\sqrt[3]{4}:2=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{m^2-\frac{a^2}{2}}:2$. **990.** Se duce $CE\parallel AD$, $AE\parallel CD$. Atunci vol. $ABCD=$ vol. $EBDA=$ $=$vol. $DBEA=$aria $EBA\times$ a treia parte din distanţa lui D la planul EBA, adică a treia parte din cea mai scurtă distanţă dintre AB şi CD. Aria ABE este jumătatea paralelogramului din enunţ. **991.** Rezultă din problema precedentă. **992.** Fie $MNPQ$ tetraedrul,

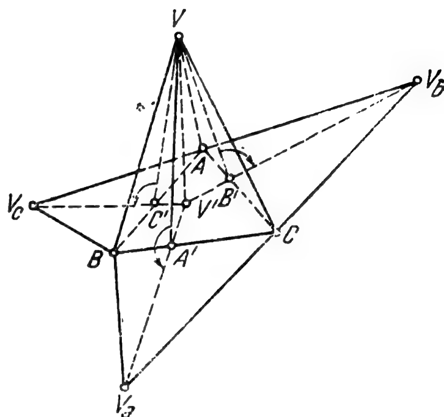


Fig. 316

C, D, E, F mijloacele muchiilor $\overline{MQ}, \overline{QN}, \overline{NP}, \overline{PM}$, AB perpendiculară pe MN şi PQ. Se construieşte pe baza MNP şi pe muchia $\overline{PQ}$ prisma triunghiulară $MNPQM_1N_1$. Volumul $MNPQM_1N_1 = 3$ vol. $MNPQ = \overline{AB}$ aria $MNM_1N_1 : 2$, vol. $MNPQ = \overline{AB} \times$ $\times$ aria $MNM_1N_1:6 = 2\overline{AB}$ aria $CDEF:3$ (G.M.I.). **993.** Fie S_1, S_2, S_3, S_4 ariile feţelor BCD, CDA, DAB, ABC. Avem $3V = S_1a = S_2b = S_3c = S_4d$, de unde $S_1 = \frac{3V}{a}, S_2 = \frac{3V}{b}, S_3 = \frac{3V}{c}, S_4 = \frac{3V}{d}$, dar $3V = S_1\alpha + S_2\beta + S_3\gamma + S_4\delta$, unde înlocuind S_1, S_2, S_3, S_4 obţinem relaţia cerută. **994.** Fie $\overline{CD}, \overline{C'D'}$ înălţimile piramidelor $CSAB$, $C'SA'B'$. Avem vol. $SABC$: vol. $SA'B'C' =$ aria $\triangle SAB \cdot \overline{CD}$: :aria $\triangle SA'B' \cdot \overline{C'D'}$, însă aria $\triangle SAB$: aria $\triangle SA'B' = \overline{SA} \cdot \overline{SB} : \overline{SA'} \cdot \overline{SB'}$; $\overline{CD} : \overline{C'D'} = \overline{SC} : \overline{SC'}$. **995.** Se va observa că vol. $SB'D'C' +$ $+$vol. $SA'B'D =$ vol. $SA'C'D' +$ vol. $SA'B'C'$ şi că vol. $SB'D'C'$: $:\overline{SB'} \cdot \overline{SD'} \cdot \overline{SC'} =$ vol. $SA'B'D'$: $\overline{SA'} \cdot \overline{SB'} \cdot \overline{SD'} =$ vol. $SA'C'D'$: $:\overline{SA'} \cdot \overline{SC'} \cdot \overline{SD'} =$ vol. $SA'B'C'$: $\overline{SA'} \cdot \overline{SB'} \cdot \overline{SC'}$; se înlocuiesc volumele prin cantităţile proporţionale şi se simplifică. **996.** Se duc dreptele $EAF \parallel BC, FBD \parallel CA, DCE \parallel AB$, se observă, că $\sphericalangle DSE = \sphericalangle ESF = \sphericalangle FSD = 90°$, vol. $SDEF = 4$ vol. $SABC$, vol. $SDEF = \overline{SD} \cdot \overline{SE} \cdot \overline{SF} : 6$; vol. $SABC = \sqrt{2}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} : 12$. **997.** Planul intersectează pe CB şi CD în E şi F. Va trebui ca CEF şi $EBDF$ să fie echivalente. $\overline{CE} : \overline{CB} = 1 : \sqrt{2}$. **998.** Fie M, N, P mijloacele muchiilor $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ ale cubului, $V = a^3 - \frac{8}{6}\overline{AM} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{AP} = 5a^3:6$; $S = (3 + \sqrt{3}) \cdot a^2$. **999.** $3a^2b\sqrt{3}:2$ şi $3a^2(h-b)\sqrt{3}:2$. **1000.** Se uneşte un punct oarecare O al secţiunii b'' cu toate vîrfurile solidului. Avem o piramidă cu baza b, o alta cu baza b'; volumele lor sînt $bh:6$, $b'h:6$. Fie $OABC$ o piramidă avînd drept bază o faţă laterală ABC, A este pe baza b, BC pe baza b'. Secţiunea b'' intersectează pe AB, AC în D, E. Avem vol. $OABC = 4$ vol. $OADE = 4$ vol. $AODE = 4h$ aria $\triangle ODE:6$. Făcînd suma piramidelor care corespund feţelor laterale, se găseşte $4b''h:6$. **1001.** Se va aplica formula volumului prismatoidului din problema precedentă în care $b =$ aria $ABCD = mn$, $b' =$ aria $EF = 0$; $b'' = m(n+k):4$; volumul $= [hm \cdot (2n+k)]:6$. **1002.** Vol. $= h\,[AB + ab + (A+a)(B+b)] : 6$, rezultă din formula prismatoidului. **1003.** Fie $mnMN$ o faţă laterală a grămezii, mn pe baza mică, MN pe baza mare. Fie p un punct pe mn. P proiecţia lui pe MN, Q proiecţia lui p pe baza mare. $\overline{Pp} = 2h$. $\overline{PQ} = h\sqrt{3}$. Rezultă de aici că dimensiunile bazei mari sînt $a + 2h\sqrt{3}$. $b + 2h\sqrt{3}$. Volumul deci, după formula

prismatoidului, este $h[ab+(a+b)h\sqrt{3}+4h^2]$. **1004.** Se va observa că $b'=b:9$ și că, înlocuind, regăsim formula cunoscută. **1005.** Fie b aria bazei, $b':b=4:9$. **1006.** Se ia un punct O pe a doua bază și se unește cu vîrfurile triunghiului. Avem piramida cu vîrful în O și cu baza b, căreia i se aplică cele spuse la probl. 1004; apoi piramide cu vîrful în O și avînd ca baze fețele laterale ale trunchiului, se vor lua drept vîrfuri puncte ale bazei b și se va aplica problema precedentă. Făcînd suma, se obține formula căutată.

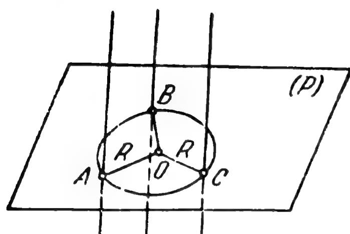


Fig. 317

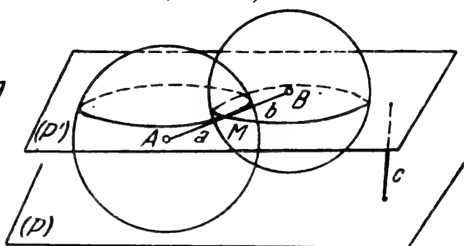


Fig. 318

1007. Se ia un punct O pe a doua bază și se raționează ca în problema precedentă.

XX. **1008.** Un cilindru drept a cărui bază este cercul descris pe o perpendiculară comună celor două drepte ca diametru și situat într-un plan perpendicular pe planul lor. **1009.** Un plan perpendicular pe dreptele date le intersectează în A, B, C (fig. 317). Cilindrul drept care are ca bază cercul ABC răspunde singur la

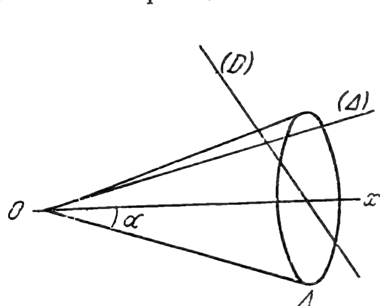


Fig. 319

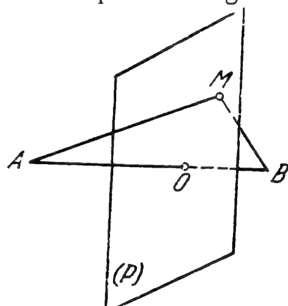


Fig. 320

problemă. **1010.** Se va observa că există patru drepte egal depărtate de cele date (probl. 885); acestea sînt axele celor patru conuri de rotație. **1011.** Punctul M se găsește luînd intersecția sferelor de centre A, B și raze a, b cu planele paralele cu (P) și depărtate de ele cu c (fig. 318). **1012.** Se duce o dreaptă oarecare OA, care să facă cu Ox unghiul α (fig. 319). Rotind pe OA în jurul lui Ox, se

obține un con (C). Dreapta căutată este la intersecția conului (C) cu planul determinat de punctul O și dreapta (D). Două soluții, una sau nici una. **1013.** O sferă de diametru $\overline{AB}$. **1014.** Dacă ar avea un alt punct comun, ar avea în comun generatoarea care trece prin acel punct; deci tangenta bazei ar întîlni baza într-un punct diferit de cel de contact. Planul din enunț se zice tangent la con. **1015.** Acel plan conține generatoarea conului trece prin punctul de contact. **1016.** *Prima metodă.* Centrul unei sfere care răspunde la problemă este una din intersecțiile celor patru drepte egal depărtate de cele trei plane (probl. 883) cu cele două plane paralele la unul din planele date și depărtate de el cu raza dată. *A doua metodă.* Centrul unei sfere cerute este una din intersecțiile celor șase plane paralele cu cele date și depărtate de ele cu raza dată. Opt soluții. **1017.** Fie ω și r centrul și raza secțiunii sferei cu planul dreptelor. $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MC}\cdot\overline{MD}=\overline{M\omega^2}-r^2=\overline{MO^2}-\overline{O\omega^2}-$ $-r^2=\overline{MO^2}-R^2$. Expresia MO^2-R^2 se numește *puterea punctului* M în raport cu sfera (O). **1018.** O sferă cu centrul în mijlocul lui $\overline{AB}$ **1019.** Un plan perpendicular pe dreapta AB (fig. 320). Acest plan se numește *planul radical* al sferelor. **1020.** O dreaptă perpendiculară pe planul centrelor care se numește *axa radicală* a celor trei sfere date. **1021.** Este intersecția planelor radicale ale sferelor luate două cîte două, sau a axelor radicale ale sferelor luate cîte trei. Punctul acesta se numește *centrul radical* al sferelor. **1022.** Fie A proiecția lui O pe (D). Locul este o parte din cercul descris pe $\overline{OA}$ ca diametru în planul dus prin O perpendicular pe (D), partea din acest cerc interioară sferei date. **1023.** Porțiunea interioară a sferei (O), din sfera descrisă pe $\overline{OA}$ ca diametru. **1024.** Se va arăta că punctul S, unde MM' intersectează pe $\overline{OO'}$, împarte segmentul $\overline{OO'}$ într-un raport constant. **1025.** Ca în problema precedentă; S și S' se numesc *centrele de asemănare* ale sferelor date. **1026.** Fie ω centrul uneia din sferele mobile. Se va observa că pătratul razei acestei sfere este $\overline{\omega O^2}+R^2$ sau $\overline{\omega O'^2}+R^2$, deci $\overline{\omega O^2}-\overline{\omega O'^2}=R'^2-$ $-R^2$. Locul este un plan (probl. 1019). **1027.** Linia centrelor trebuie să fie perpendiculară pe intersecția (D) a planelor cercurilor și un singur punct de pe această intersecție să aibă puteri egale în raport cu cele două cercuri, sau, ceea ce este același lucru, toate punctele dreptei (D) să aibă puteri egale în raport cu cele două cercuri. Se vede imediat că aceste condiții sînt necesare. Pentru a se arăta că sînt suficiente, se va observa că perpendicularele de pe planele cercurilor în centrele lor se întîlnesc în virtutea condițiilor, într-un punct O. Sfera de centru O și care trece printr-unul din cercuri, sau trece și prin celălalt, sau intersectează planul lor după un cerc concentric. Acest ultim caz este imposibil, căci ar exista un

punct care să aibă puteri egale în raport cu două cercuri concentrice. Se va mai observa că dacă cercurile intersectează dreapta (D), ele vor fi pe o sferă, dacă au aceleaşi puncte de intersecţie. **1028.** Se iau două feţe alăturate şi se arată că axistă o sferă care trece prin cele şase vîrfuri ale lor. Se va observa apoi că două din feţele rămase au cîte trei vîrfuri pe sferă, deci şi pe al patrulea. **1029.** Planul dus prin AB intersectează sfera (O) după un cerc care trece prin $ABA'B'$. Dreptele AB, $A'B'$ se intersectează în S care este fix, căci este punctul unde AB intersectează planul cercului (C). Planul $OA'B'$ se roteşte în jurul lui OS. **1030.** Fie M_1 punctul diametral opus lui M în cercul de bază. Pe prelungirile lui $\overline{SM}$ şi $\overline{SM_1}$ se ia $\overline{SM'} = \overline{Sm_1}$ şi $\overline{SM'_1} = \overline{Sm}$ şi se arată apoi că punctele M'_1, M' descriu o curbă situată într-un plan paralel cu planul bazei, deci un cerc. Curba descrisă de M' şi cea descrisă de m fiind simetrice în raport cu S, locul căutat este un cerc. **1031.** Fie M un punct mobil pe cercul de intrare, S vîrful conului. SM intersectează sfera în m, $\overline{SM} \cdot \overline{Sm}=$const, deci m descrie un cerc (probl. 1030). **1032.** Fie H punctul de întîlnire a înălţimilor, G acela a medianelor, ω centrul cercului circumscris triunghiului ABC, A', B', C' mijloacele laturilor lui ABC. Se va arăta cu ajutorul teoremei celor trei perpendiculare că H este proiecţia lui S pe ABC, ω este proiecţia lui O. Se va observa că $OA' \perp BSC$, deci $OA' \| SA$ şi $OB' \| SB$, $OC' \| SC$; aşadar, planele ASA'; BSB', CSC', deci şi dreapta SG, trec prin O. Însă $\overline{SG}:\overline{GO}=\overline{HG}:\overline{G\omega}=2$, deci G este fix. **1033.** Se duce arcul de cerc mare care trece prin A şi prin mijlocul M al lui $\overline{BC}$. Triunghiurile sferice ABM, ACM sînt egale. **1034.** Rezultă din egalitatea triunghiurilor ABM, ACM din problema precedentă. **1035.** Fie l, m, n, l', m', n' mijloacele coardelor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$. Se va demonstra că ll', mm', nn' se întîlnesc într-un punct. **1036.** Fie B' diametral opus lui B în sferă, arc $AC=$arc AB'. Locul lui A este cercul mare perpendicular pe $\overline{CB'}$ în mijlocul său. **1037.** Fie P unul din polii cercului $ABCD$. Arcele PA, PB, PC, PD sînt egale şi despart fiecare unghi al patrulaterului în cîte două. Suma a două unghiuri opuse se compune din patru unghiuri egale cu cele patru unghiuri care compun suma celorlalte două unghiuri opuse. **1038.** Se duc arcele BP, CP, aşa ca să facă cu BC acelaşi unghi k. Se arată apoi că arc $PA=$ $=$ arc $PB=$arc PC. Locul se compune deci din două cercuri avînd ca poli cele două poziţii ale punctului P şi trecînd prin B şi C. **1039.** Sfera descrisă pe SM ca diametru trece prin A,B,C. Planul dus prin M perpendicular pe SM este antiparalel cu planul ABC, căci este paralel cu planul tangent în S la sferă. Planul $A'B'C'$ rămînînd mereu perpendicular pe SM, toate punctele principale

ale triunghiului $A'B'C'$ descriu drepte trecînd prin vîrful triedrului (G.M. IX). **1040.** Fie G și H punctele de întîlnire a medianelor și a înălțimilor; ω centrul cercului circumscris, A',B', C' mijloacele laturilor. G este fix (probl. 1032). a) Locul lui ω este sfera descrisă pe $\overline{OG}$ ca diametru. b) Locul lui H este sfera descrisă pe $\overline{SG}$ ca diametru. c) ω' fiind centrul cercului celor nouă puncte, se observă că $\overline{H\omega'}=\overline{\omega\omega'}$ și deci locul lui ω' este sfera descrisă pe $\overline{O'G}$, ca diametru, O' fiind mijlocul lui OS. d) Se va observa că unghiurile $SA'O$, $SB'O$, $SC'O$ sînt drepte și deci locul cercului celor nouă puncte este sfera descrisă pe $\overline{SO}$ ca diametru (G.M. VIII). **1041.** În cazul a două sfere locul vîrfurilor conurilor din enunț este sfera, care are ca diametru segmentul de dreaptă cuprins între centrele de asemănare a celor două sfere. Se deduce că locul cerut este un cerc (G.M. XIII).

XXI. **1042.** Planul cerut trece prin intersecția conului dat cu o sferă de centru O și de rază $\sqrt{R^2-a^2}$. Două soluții, una sau nici una, după cum $\sqrt{R^2-a^2}>R/2$ sau $\sqrt{R^2-a^2}<R/2$, sau după cum $a^2<3R^2/4$ sau $a^2>3R^2/4$. **1043.** Se duce prin OO' un plan ce intersectează sferele după două cercuri tangente în C (fig. 321). Fie A,A' punctele de contact ale unei tangente comune, M mijlocul lui $\overline{AA'}$. $S=4\pi\overline{MC}^2$, căci $\overline{MC}=\overline{MA}=\overline{MA'}$, însă $\sphericalangle OMO'=90°$, $\overline{MC}^2=R\cdot R'$, deci $S=4\pi RR'$. **1044.** Cînd $R=R'$, atunci $S=4\pi R^2=$aria fiecărei sfere (O) și (O'). **1045.** $R=(S+a^2):(2a)$, $r=(S-a^2):(2a)$. **1046.** Pămîntul scos este jumătate dintr-o coroană cilindrică de raze R și $R+2a$ și înălțimea i. Relația este $6ai\times(R+a)=R^2h$. **1047.** Unind centrul O al sferei cu vîrfurile piramidei și notînd cu S_1, S_2, S_3, S_4 ariile fețelor piramidei date, avem $\frac{1}{3}R(S_1+S_2+S_3+S_4)=V$ sau $\frac{1}{3}S\cdot R=V$; dar $V=\frac{S_1\cdot h_1}{3}=\frac{S_2\cdot h_2}{3}=\frac{S_3\cdot h_3}{3}=\frac{S_4\cdot h_4}{3}=\frac{1}{3}SR$ sau $S_1=\frac{S\cdot R}{h_1}$ și alte trei egalități analoge. Adunînd cele patru egalități și împărțind cu R, obținem relația din enunț. **1048.** În jurul lui BC, $V=2\pi S\cdot h_a:3$, în care S este aria triunghiului, h_a înălțimea din A, $V=4\pi p(p-a)(p-b)(p-c):(3a)$. **1049.** Fie A' proiecția lui G pe BC.

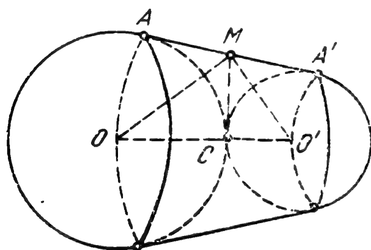


Fig. 321

$\overline{GA'}=h_a:3$. $V=2\pi\overline{GA'}\cdot S$. **1050.** După probl. 1048, $V=2\pi Sh_a:3$, deci cel mai mare volum se obține rotind triunghiul în jurul laturii pe care cade înălțimea cea mai mare, sau, deoarece $ah_a=bh_b=$ $=ch_c=2S$, în jurul laturii celei mai mici. **1051.** Pentru a găsi razele bazelor trunchiului de con născut din BC, se duce înălțimea din A și se observă că se formează două triunghiuri asemenea cu triunghiurile formate de perpendicularele coborîte din B și C pe tangentă cu laturile AB și AC. Se găsește $2\pi S(b^2+c^2):(bc)$, în care S este aria triunghiului; dacă $\sphericalangle A=90°$, atunci aria descrisă de BC este πa^2. **1052.** $4\pi S^2(b^2+c^2):(3abc)$ care se reduce la $\pi abc:3$ dacă $\sphericalangle A=90°$. **1053.** Fie C' proiecția lui C pe AB. Vol. $ABCD=$ $=$vol. $AC'CD-$vol. $BC'C$. Se observă că $\overline{AC'}=\overline{C'C}$ căci $\sphericalangle CAC'=$ $=45°$, $\overline{AC}=a(\sqrt{2}+\sqrt{6}):2$, se obține descompunînd pe AC în două părți prin intersecția cu BD; deci $\overline{AC'}=\overline{C'C}=a(1+\sqrt{3}):2$. Vol. $AC'CD=\pi a^3(11+7\sqrt{3}):12$, vol. $ABC'C=\pi a^3(1+\sqrt{3}):12$, vol. $ABCD=\pi a^3(5+3\sqrt{3}):6$. **1054.** a) Fie V_1, V_2, V_3 volumele obținu-

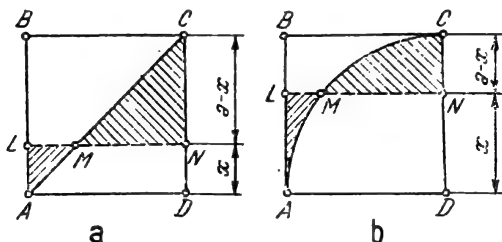


Fig. 322

te prin rotația triunghiurilor ALM, MNC și a trapezului $AMND$ (fig. 322, a). Notăm $\overline{DN}=x$. Din enunț $V_1=V_2$ sau adăugînd pe V_3, obținem $V_1+V_3=V_2+V_3$. Dar $V_1+V_3=\pi a^2x$ și $V_2+V_3=\frac{\pi a^3}{3}$, de unde $x=\frac{a}{3}$. b) Fie W_1, W_2, W_3 volumele obținute prin rotația triunghiurilor curbilinii ALM, MNC și a trapezului curbiliniu $AMND$ și $\overline{DN}=x$ (fig. 322,b). Avem W_1+ $+W_3=W_2+W_3$. Dar $W_1+W_3=\pi a^2x$ și $W_2+W_3=2\pi a^3/3$, deci $x=2a/3$. **1055.** F, C se proiectează în F', C' pe AB; E, D în E', D' pe CF. Vol. $ABCF=$vol. $F'C'CF-2$ vol. $AEF'F=5\pi a^3:4$, vol. $CDEF=$vol. $ABDE-$ vol. $ABD'E'+2$ (vol. $AEFF'-$ $-$ vol. $AE'FF')=13\pi a^3:4$. **1056.** r_1, r_2, r_3 fiind razele celor trei cercuri, suma ariilor este $\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$. Se aplică problema 603. **1057.** O_1, O_2, O_3 centrele, R_1, R_2, R_3 razele celor trei sfere și h distanța între plane. Notăm cu r_1, r_2, r_3 razele cercu-

rilor de secțiune în cele trei sfere: $r_1^2=h(2R_1-h)$; $r_2^2=h(2R_2-h)$; $r_3^2=h(2R_3-h)$. Aria $=\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)=\pi h\,[2(R_1+R_2+R_3)-3h]$. Distanța centrului de greutate la planul dat, $d=\frac{R_1+R_2+R_3}{3}$, $A=3\pi h(2d-h)$. Notăm $d-h=m$, atunci $A=3\pi(d^2-m^2)$; $m=0$ avem maxim, deci $h=d$. **1058.** Fie R, r razele bazelor trunchiului de con și ρ raza sferei, AB generatoarea și E punctul de contact cu sfera. Centrele bazelor sînt O' și O''. Avem $\overline{AE}=\overline{AO''}=r$ și $\overline{BE}=\overline{BO'}=R$. Din $\triangle AOB$ rezultă $\overline{DE}^2=\overline{AE}\cdot\overline{EB}$ sau $\rho^2=Rr$. Aria trunchiului de con $S_1=\pi G(R+r)+\pi R^2+\pi r^2=2\pi\,(R^2+r^2+Rr)$, deoarece $G=R+r$. Aria sferei $S=4\pi\rho^2=4\pi Rr$. Volumele $V_1=\frac{2\rho\pi}{3}\cdot(R^2+r^2+Rr)$; $V=\frac{4\pi\rho^3}{3}$. Deci $\frac{S}{S_1}=\frac{2Rr}{R^2+r^2+Rr}$; $\frac{V}{V_1}=\frac{2\rho^2}{R^2+r^2+Rr}=\frac{2Rr}{R^2+r^2+Rr}$. **1059.** Se duce diametrul AB perpendicular în C pe planul dat; fie D un punct pe cercul înscris hexagonului, $\overline{DC}^2=3a^2:4=\overline{AC}\cdot\overline{CB}$, însă $\overline{AC}:\overline{CB}=k$, $\overline{AC}=a\sqrt{3k}:2$, $\overline{BC}=a\sqrt{3}:2\sqrt{k}$, deci $R=a\sqrt{3}(1+k):(4\sqrt{k})$. **1060.** Fie R raza sferei. Aria cilindrului $=6\pi R^2$, volumul$=2\pi R^3$. Aria cercului$=9\pi R^2$, volumul conului$=3\pi R^3$. **1061.** Fie C' proiecția lui C pe AB. Vol.$ADCA=\pi\overline{AC}^2\cdot\overline{AC'}:6$; vol.$CEBC=\pi\overline{BC}^2\cdot\overline{BC'}:6$, zona $ADC=\pi\overline{AC}^2$, zona $CEB=\pi\overline{CB}^2$, însă $\overline{AC'}:\overline{BC'}=\overline{AC}^2:\overline{BC}^2$. **1062.** Fie M

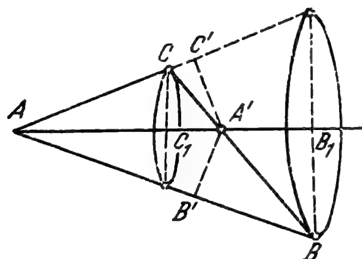


Fig. 323

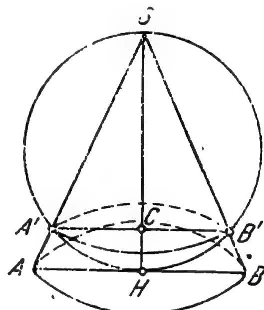


Fig. 324

pe semicerc, așa ca $MH\perp AB$, C' piciorul bisectoarei unghiului AMB atunci $CC'\perp AB$. **1063.** Fie B', C' proiecțiile lui A' pe AB, AC; B_1,C_1 ale lui B,C pe AA'(fig.323). Avem vol.ABA'=aria$\overline{AB}\cdot\overline{A'B'}:3$, vol. ACA' =aria $\overline{AC}\cdot\overline{A'C'}:3$; însă $\overline{A'B'}=\overline{A'C'}$, apoi aria $\overline{AB}=\pi\overline{AB}\cdot\overline{BB_1}$, aria $\overline{AC}=\pi\overline{AC}\cdot\overline{AC_1}$, $\overline{BB_1}:\overline{CC_1}=\overline{BA'}:\overline{A'C}=\overline{AB}:\overline{AC}$. **1064.** Fie M' proiecția lui M pe AB, O mijlocul lui $\overline{AB}$, I al lui $\overline{AM}$.

Avem $\triangle AA'I \sim \Delta MAM'$, deci $\overline{AA'} \cdot \overline{MM'} = \overline{A^2M} : 2 = (\overline{AM'^2} + \overline{MM'^2}) : 2$. Servindu-ne de această relație se arată că vol. $AA'M = \pi \overline{AM'} \cdot \overline{AA'^2} : 3$ și în același mod că vol. $BB'M = \pi \overline{BM'} : \overline{BB'^2} : 3$. Se va observa că $\overline{AA'} : \overline{BB'} = \overline{MA'} : \overline{MB'} = \overline{M'A} : \overline{M'B}$, deci $\overline{AM'^3} : \overline{M'B^3} = a^3 : b^3$, $\overline{AM'} \cdot \overline{M'B} = a : b$. **1065.** Fie R raza celor două cercuri. Volumul născut din triunghiul rectiliniu $ACA' = 4\pi R^3 : 3$, volumul născut din triunghiul mixtiliniu $ACA' = 2\pi R^3 : 3$. **1066.** $x = \sqrt{b^4 - a^4} : (b\sqrt{2})$, $y = (a^4 + b^4) : [b\sqrt{2(b^4 - a^4)}]$; va trebui ca $b > a$. **1067.** $x = R\sqrt{2}$. **1068.** Se duce un plan prin înălțimea SH a conului (fig. 324). Avem generatoarele SA, SB intersectate de cercul descris pe $\overline{SH}$ ca diametru în A', B'. $A'B'$ intersectează pe SH în C. Volumul căutat $= \pi \overline{SA'^2} \cdot \overline{SC} : 6$, însă $\overline{SA'} : \overline{SA} = \overline{SC} : \overline{SH}$ și $\overline{SA'^2} = \overline{SC} \cdot \overline{SH}$, deci $\overline{SA'} = 2R \cdot \sqrt{3} : 3$, $\overline{SC} = 2R\sqrt{2} : 3$, volumul $4\pi R^3\sqrt{2} : 27$. **1069.** $AB = an : \sqrt{m^2 + n^2}$, $\overline{AC} = am : \sqrt{m^2 + n^2}$. **1070.** $a\sqrt{mn(m+n)} : [2\sqrt[4]{(m^2+n^2)^3}]$. **1071.** Se știe că $V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h(r^2 + r'^2)$, r și r' fiind razele bazelor. Se va arăta că $r^2 + r'^2 = 2\rho^2 - h^2/2$. **1072.** După formula din problema precedentă, volumul segmentului nu depinde de raza sferei. **1073.** Aria zonei este πR^2; nu depinde de raza sferei S. **1074.** $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C - 180° = \text{const} = k$. Fie B', C' diametral opuse lui B și C. În triunghiul sferic $AB'C'$, $\sphericalangle B' = 180° - \sphericalangle B$, $\sphericalangle C' = 180° - \sphericalangle C$, deci $\sphericalangle B' + \sphericalangle C' - \sphericalangle A = 180° - k = \text{const}$. Locul lui A se compune deci din două cercuri ce trec prin B' și C' (probl. 1038). **1075.** Aria $ABCD = A + B + C + D - 4$ drepte, aria triunghiului sferic din $A = 2$ drepte $- A$, deci aria $ABCD +$ aria celor 4 triunghiuri sferice $= 4$ drepte, adică este echivalentă cu 4 triunghiuri tridreptunghice $=$ jumătatea sferei. **1076.** Dintr-un punct O interior poliedrului, ca centru, se descrie o sferă conținută în poliedru. Unind punctul O cu un punct N, mobil pe fețele poliedrului, punctul N', unde raza ON intersectează sfera, descrie întreaga sferă. Unei fețe a poliedrului îi corespunde un poligon sferic, unui vîrf al poliedrului îi corespunde un vîrf al unui poligon sferic. *Întreaga* sferă este acoperită și numai o *singură* dată de poligoane sferice. Să scriem că aria sferei este echivalentă cu suma ariilor tuturor poligoanelor precedente. Vom avea opt unghiuri drepte, care corespund sferei $= \Sigma$[suma unghiurilor $- (n-2) \cdot 2$ unghiuri drepte], Σ înseamnă că trebuie să luăm expresia din paranteză relativ la fiecare poligon sferic și să facem suma, n este numărul vîrfurilor poligonului sferic ce se va considera. Vom descompune pe Σ în trei părți: Σ(suma unghiurilor), $\Sigma n \cdot 2$ unghiuri drepte și Σ 4 unghiuri drepte. Se observăm că în jurul unui vîrf de poligon sferic suma unghiurilor este patru unghiuri drepte, deci

Σ(suma unghiurilor) $= V \cdot 4$ unghiuri drepte. Se va observa apoi că numărul vîrfurilor unui poligon sferic este egal cu acela al laturilor, se deduce $\Sigma n \cdot 2$ unghiuri drepte$= M \cdot 4$ unghiuri drepte, căci o latură se prezintă de două ori. În fine $\Sigma 4$ unghiuri drepte $= F \cdot 4$ unghiuri drepte. Deci 8 unghiuri drepte $= (V + F - M) \cdot 4$ unghiuri drepte, de unde se deduce formula din problemă. **1077.** Această sumă este $\Sigma(n-2)\cdot 2$unghiuri drepte, Σ referindu-se la toate fețele, n fiind numărul vîrfurilor acelei fețe. Printr-un raționament analog cu cel din problema precedentă se găsește $(M-F)\cdot 4$ unghiuri drepte sau, $(V-2)\cdot 4$ unghiuri drepte. **1078.** Fie V_3, V_4 numărul vîrfurilor din care pleacă respectiv 3 și 4 muchii. Avem $V = V_3 + V_4$, $M = (4V_4 + 3V_3):2$, $F = (4V_4 + 3V_3):4$, căci din unele vîrfuri pleacă 3 fețe, din altele 4, însă fiecare față este considerată de patru ori, căci are patru vîrfuri. Aplicînd formula lui Euler, se găsește $V_3 = 8$, iar V_4 dispare. **1079.** Raza bazei conului este $R\sqrt{2}$. Aria totală a conului$= \pi R\sqrt{2} \times \times 3R\sqrt{2} + 2\pi R^2 = 2 \cdot 4\pi R^2$. Volumul conului este $\frac{4R}{3} \cdot 2\pi R^2 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$.

XXII. **1080.** Fie C punctul unde cercul AOB intersectează bisectoarea unghiului xOy, A_1 și B_1 proiecțiile lui C pe Ox și Oy. Triunghiurile egale CA_1A, CB_1B ne dau $\overline{A_1A} = \overline{BB_1}$, deci $\overline{OA_1} + \overline{OB_1} = \overline{OA} + \overline{OB} = c$, de unde $\overline{OA_1} = c/2$, iar punctul C este fix. Locul căutat este mediatoarea segmentului $\overline{OC}$ (R. M. F. 1954). **1081.** Fie k valoarea constantă a sumei celor două segmente. Luăm pe Ox și Oy, $\overline{OP} = \overline{OQ} = k$ (fig. 325). P și Q aparțin locului. Construim paralelogramul $OBMA$; M aparține locului deoarece $\overline{MB} + \overline{MA} = \overline{OA} + \overline{OB} = k$. Triunghiul MAP este isoscel, căci $\overline{MA} = \overline{OP} - \overline{OA} = \overline{AP}$, deci $\sphericalangle MPA = \frac{1}{2}(180° - \varphi)$, unde $\varphi = \sphericalangle AOB$. Dar în triunghiul POQ avem $\sphericalangle QPO = \frac{1}{2}(180° - \varphi)$, deci punctele P, M, Q sînt coliniare. Locul lui M este dreapta PQ. Se va arăta că dacă A se află pe prelungirea Ox, deci OA negativ, B este situat în afara lui OQ, iar M pe prelungirea lui PQ. Fie N al doilea punct de intersecție a celor două cercuri; el este simetricul lui M

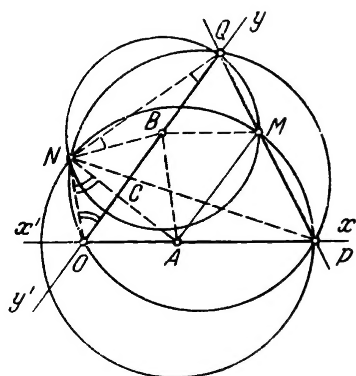


Fig. 325

față de AB. Din egalitatea triunghiurilor OAN, OBN rezultă că patrulaterul $OABN$ este inscriptibil. Se deduce că patrulaterul $OPQN$ este inscriptibil, deci locul lui N este cercul OPQ. *Altă soluție*, pentru locul lui N. Fie I intersecția perpendicularelor în P și Q pe Ox și Oy. PI și QI sînt tangente la cercurile (A) și (B) și deoarece $\overline{IP} = \overline{IQ}$, I se află pe axa radicală a lor, deci $\overline{IM} \cdot \overline{IN} = \overline{IP}^2$=const. Locul lui N este inversa dreptei PQ față de polul I și puterea $\overline{IP}^2$, deci un cerc (G.M. XXXIX). **1082.** a) Fie a, b, c laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Avem $\overline{B'C'}^2 = b^2+c^2-2bc \cos \sphericalangle B'HC' = b^2+c^2+2bc \cos A = 2(b^2+c^2)-a^2 = 4m_a^2$. b) Fiecare din triunghiurile $HB'C'$, $HC'A'$, $HA'B'$ este echivalent cu ABC. c) Din echivalența triunghiurilor $A'HC'$ și $A'HB'$ rezultă că B' și C' sînt egal depărtate de $A'H$, deci $A'H$ trece prin mijlocul lui $\overline{B'C'}$. d) Fie M mijlocul lui BC și N simetricul lui A față de M. Triunghiurile $HB'C'$ și CAN sînt egale ca avînd laturile respectiv egale; dar $AC \perp HB'$; $CN \perp HC'$, deci $AM \perp B'C'$. Dacă A este obtuz, atunci HA' trebuie luat în sensul HA (G.M.F. 1955, seria A). **1083.** Patrulaterele $ABA'B'$, $BCB'C'$, $CAC'A'$ fiind inscriptibile, rezultă că axele radicale ale acestor cercuri, luate cîte două, se

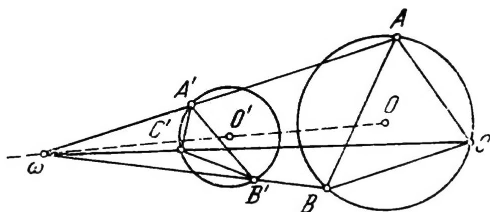


Fig. 326

întîlnesc în centrul radical ω (fig. 326); însă axele radicale sînt BB', CC' și AA' și atunci cele două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ sînt omologice, cu centrul de omologie în ω. Considerînd și cercurile circumscrise (O) și (O') ale lui ABC și $A'B'C'$, AC și $A'C'$, AB și $A'B'$, BC și $B'C'$ se întîlnesc pe axa radicală a cercurilor (O) și (O') care este axa de omologie a celor două triunghiuri. Punctele A, A'; B, B'; C, C' sînt antiomoloage pe cele două cercuri, deci ω este centrul de asemănare al lui (O) și (O'). b) Fiind dat ABC, ducem un cerc (O') arbitrar, determinăm centrul de asemănare ω și ducem dreptele ωA, ωB, ωC. Acestea intersectează pe (O') în șase puncte dintre care trei sînt omoloagele lui A, B, C și trei antiomoloagele lor. Ultimele trei formează triunghiul $A'B'C'$ (G.M. XLIX). **1084.** Fie A'' simetricul lui A' față

de M (fig. 327). AA'' intersectează mediatoarea laturii $\overline{BC}$ într-un punct E astfel că $IE \| BC$. Într-adevăr, dacă D este piciorul înălțimii, avem $\overline{A'M} = \overline{MA''} = (b-c)/2$, $\overline{DM} = (b^2-c^2):(2a)$, $\overline{DA''} = \frac{b^2-c^2}{2a} + \frac{1}{2}\cdot(b-c) = \frac{p}{a}(b-c)$. Rezultă $\overline{A''M}:\overline{A''D} = a:(2p) = \overline{EM}:h$, de unde $\overline{EM} = ah:(2p) = S:p = r$. *Construcția*: se duce MA', apoi $ME \perp MA'$ și se ia simetricul A'' al lui A' față de M. AA'' intersectează pe ME în E; paralela prin E la BC intersectează perpendiculara în A' pe $A'M$ în I, centrul cercului înscris. Se duc apoi tangentele din A la cerc (R.M.F. 1953). **1085.** Se duce $ND \perp MA'$; aceasta este direcția înălțimii. $\overline{MN}$ este diametrul cercului celor nouă puncte, care se poate construi. Cercul înscris se construiește ca fiind tangent cercului lui Euler (teorema lui Feuerbach) și tangent dreptei MA' în A' (probl. 351). Paralela prin I la $A'M$ intersectează perpendiculara în M pe MA' în J. Fie A'' simetricul lui A' față de M. $A''J$ intersectează pe ND în A, iar tangentele din A la cercul (I) determină punctele B și C. A se vedea problema precedentă (G. M. F. 1954, seria B). **1086.** Pe cercul (O) de rază R se ia un punct fix A și o coardă AM (fig. 328). Să luăm $\overline{ON} \perp \overline{AM}$, astfel ca $\overline{ON} = \overline{AM}$ și să căutăm locul lui N. Se observă că $\overline{ON}$ se obține dînd lui $\overline{AM}$ o traslație de mărime și direcție AO, apoi o rotație de 90° în jurul lui O. Rezultă că locul lui N se obține din cercul (O), dîndu-i o translație $\overline{O\omega} = \overline{AO}$ și apoi o rotație de 90°, deci este un cerc egal cu (O), cu centrul în ω'. Acest cerc întîlnește cercul cu centrul în A, de rază dată r în O' și O'_1, care sînt centrele cercurilor de rază r, ce răspund la problemă, deci două soluții. Dacă problema se tratează algebric, se ajunge la ecuația $2x^4 - 2(R^2+r^2)x^2 + (R^2-r^2)^2 = 0$; construcția grafică de mai sus rezolvă, deci, această ecuație de gradul al patrulea. **1087.** Fie a, b, c proiecțiile lui A, B, C pe planul (P). Axa conului fiind perpendiculară pe plan, trebuie ca unghiurile făcute de OA, OB, OC cu planul să fie egale, deci triunghiurile OaA, ObB, OcC sînt asemenea. Se deduce $\overline{Oa}:\overline{Ob} = \overline{Aa}:\overline{Bb}$; $\overline{Ob}:\overline{Oc} = \overline{Bb}:\overline{Cc}$; $\overline{Oc}:\overline{Oa} = \overline{Cc}:\overline{Aa}$. Punctul O se află deci la intersecția a trei cercuri, care au aceeași axă

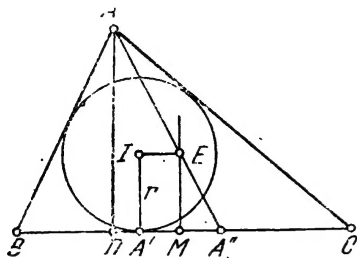


Fig. 327

radicală, deci în general există două puncte comune O şi O'. Condiţiile ca cercurile să se intersecteze sînt: $\overline{Aa}\cdot\overline{Oa}+\overline{Bb}\cdot\overline{Ob}\geqslant\overline{Cc}\cdot\overline{Oc}$, $\overline{Bb}\cdot\overline{Ob}+\overline{Cc}\cdot\overline{Oc}\geqslant\overline{Aa}\cdot\overline{Oa}$; $\overline{Cc}\cdot\overline{Oc}+\overline{Aa}\cdot\overline{Oa}\geqslant\overline{Bb}\cdot\overline{Ob}$ (G.M. XLIV). **1088.** Fie AA', BB', CC' înălţimile şi H ortocentrul triunghiului (fig. 329). Ducem cercul cu diametrul $\overline{AA'}$, perpendicular pe planul ABC şi ridicăm în H perpendiculara pe plan, pînă intersectează cercul în O şi O'. Avem $\overline{HO}^2=\overline{HA}\cdot\overline{HA'}$, procedînd la fel pentru înălţimea BB', găsim $\overline{HO}_1^2=\overline{HB}\cdot\overline{HB'}$; dar

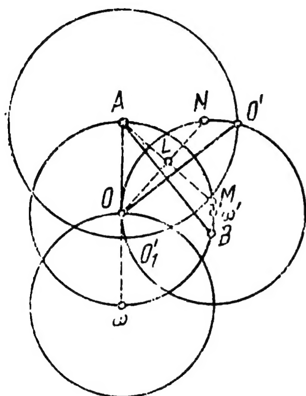


Fig. 328

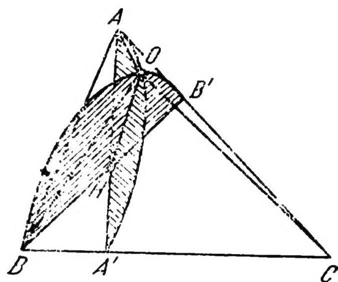


Fig. 329

$\overline{HA}\cdot\overline{HA'}=\overline{HB}\cdot\overline{HB'}$, deci O_1 se confundă cu O. Cele trei cercuri, perpendiculare pe planul ABC, cu diametrele $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, au două puncte comune O, O' simetrice faţă de planul ABC. Rezultă $OA\perp OBC$, $OB\perp OCA$, $OC\perp OAB$, deci O este punctul căutat; de asemenea simetricul său O'. **1089.** Se va demonstra întîi că dacă o muchie a unui tetraedru alunecă pe dreapta pe care se găseşte, volumul tetraedrului rămîne acelaşi. Deci, mişcăm, de exemplu, muchia AB, pînă cînd A vine în planul (P), în O. B vine în E. Am obţinut tetraedrul $OECD$ echivalent cu cel dat. Construim un triunghi echilateral MNP echivalent cu ECD, lucru cunoscut din geometria plană, apoi aşezăm acest triunghi cu centrul în proiecţia O' a lui O pe planul ECD. Se poate proceda la fel cu oricare muchie.